ANTOHE FLORIN-MIHAI

Metode variaționale în studiul ecuațiilor operatoriale

-Lucrare științifică-

Editura Sfântul Ierarh Nicolae
2010

ISBN 978-606-8129-29-7

Cuvânt înainte

Lucrarea de față are un pronunțat caracter ştiințific, ea abordând metode variaționale cu ajutorul cărora se studiază ecuațiile operatoriale.

Este alcătuită din 3 capitole:

- Capitolul I –Elemente de teoria spațiilor Hilbert în care sunt abordate noțiuni elementare despre spații Hilbert, teoreme de analiză funcțională foarte importante. Tot în acest capitol sunt prezentate clase de operatori , iar în final câteva probleme legate de teoria spațiilor Hilbert.
- Capitolul II- Metoda variațională în studiul operatorilor liniari şi pozitiv definiți. În acest capitol se prezintă teorema variațională fundamentală, apoi cea întărită cât şi o caracterizare a soluției generalizate a ecuației Au=f.
- Capitolul III- Metoda variațională în studiul operatorilor neliniari cu diferențială simetrică şi pozitiv definită.

Lucrarea este construită pe baza cunoştințelor şi cercetărilor întreprinse de autor la cursurile de *Analiză funcțională* şi *Calcul variațional* studiate în timpul facultății cu domnul profesor conf. univ. dr. Jenică Crînganu, căruia doresc să-i mulțumesc şi pe această cale pentru ajutorul acordat.

Autorul

CUPRINS

Capitolul 1. Elemente de teoria spațiilor Hilbert

1.1. Spații prehilbertiene şi spații hilbertiene

Fie $H/_{\Lambda}$ un spațiu vectorial (Λ = **R** sau **C**).

Definiția 1 :

Aplicația $< \cdot, \cdot > : H \times H \to \Lambda$ se numeşte produs scalar pe H dacă:

$$<u, u> \geq 0, (\forall)u \in H \text{ şi } <u, u> = 0 \Leftrightarrow u = \theta$$

$$<u,v> = \overline{<v,u>} \ (\forall)u,v \in H$$

$$<\lambda u,v> = \lambda <u,v>, (\forall) \lambda \in \Lambda, u,v \in H$$

$$<u_1 + u_2,v> = <u_1,v> + <u_2,v>, \ (\forall)u_1, u_2,v \in H.$$

Produsul scalar generează o normă, care este dată de:

$$||u||^2 = <u, u>, \ (\forall)u \in H.$$

Definiția 2:

1.Spațiul vectorial normat în care norma este generată de un produs scalar se numeşte spațiu prehilbertian.

2.Se numeşte spațiu prehilbertian orice spațiu liniar normat H în care are loc egalitatea:$||x+y||^2+||x-y||^2=2(||x||^2+||y||^2)$ care se numeşte identitatea paralelogramului.

Remarcăm că inegalitatea lui Cauchy-Schwartz rămâne adevărată într-un spațiu prehilbertian**:** $|<u,v>| \leq ||u|| \, ||v||, (\forall) u,v \in H$.

Observația 1:

Produsul scalar care generează norma unui spațiu prehilbertian H este o aplicație continuă a lui H x H în Λ.

Într-adevăr, fie $x=\lim_{n\to\infty} x_n$ şi $y=\lim_{n\to\infty} y_n$ în H. Folosind inegalitatea lui Cauchy-Schwartz obținem :

$|<x_n, y_n> - <x, y>| \le |<x_n, y_n> - <x, y_n>| + |<x, y_n> - <x, y>| = |<x_n - x, y_n>| +$
$+ |<x, y_n - y>| \le \| x_n - x \| \cdot \| y_n \| + \| x \| \cdot \| y_n - y \|$

Deci $<x,y> = \lim\limits_{n \to \infty} <x_n, y_n>$.

Observația 2 :

Orice spațiu prehilbertian este un spațiu liniar normat uniform convex.

Ca demonstrație a se vedea problema 2 de la paragraful Aplicații.

Definiția 3:

1. Un spațiu prehilbertian şi complet se numeşte spațiu Hilbert.

2. Un spațiu Banach în care norma provine dintr-un produs scalar se numeşte spațiu Hilbert.

În continuare definim distanța de la un element al unui spațiu vectorial la o mulțime. Fie $(X,\|\cdot\|)$ spațiu vectorial normat., $M \subset X$ o mulțime închisă şi nevidă iar $u \in X$. Definim distanța de la u la M ca fiind $d(u,M) = \inf\limits_{v \in M} d(u,v) = \inf\limits_{v \in M} \| u - v \|$.

Propoziția 1.

Fie $u \in X$, $M \subset X$, închisă şi nevidă. Atunci $d(u,M) = 0$ dacă şi numai dacă $u \in M$.

Demonstrație *:*

Dacă $u \in M$ este evident că $d(u,M) = 0$. Reciproc, dacă $d(u,M) = 0$ atunci există un şir $(v_n) \subset M$ astfel încât $\|u - v_n\| \to 0$, adică $v_n \to u$ şi cum M este închisă rezultă $u \in M$.

Fie H/Λ un spațiu Hilbert.

Definiția 4.

Două elemente $u,v \in H$ se numesc ortogonale dacă $<u,v> = 0$ şi scriem $u \perp v$.

1.2. Teoremele de existență şi de caracterizare a proiecțiilor

Teorema 1(de existență a proiecțiilor)

Fie H/Λ un spațiu Hilbert , K⊂ H , convexă, închisă, nevidă şi u∈H. Atunci există w∈K, unic, astfel încât d(u,K) = d(u,w) = ||u-w||.

Demonstrație:

Cum K⊂ H este convexă rezultă că :

$[u_1,u_2] = \{(1-\lambda) u_1 + \lambda u_2 : \lambda \in[0,1]\} \subset K, (\forall) u_1,u_2 \in K.$

Fie $d = d(u,K) = \inf\limits_{v\in K} ||u - v||$. Atunci există un şir $(v_n) \subset K$ astfel încât $||u - v_n|| \to d$.

Existența unui asemenea şir rezultă din proprietățile elementare ale marginii inferioare a unei mulțimi de numere reale.

Vom arăta că (v_n) este un şir Cauchy în H. Vom folosi identitatea paralelogramului:

$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2+||y||^2)$, $(\forall)x, y\in H$. Considerând $x = u - v_n$ şi $y = u - v_m$ obținem :

$$||2u -(v_m+v_n)||^2 + ||v_m-v_n||^2 = 2(||u-v_m||^2 +||u-v_n||^2), \text{ de unde :}$$

$$||v_m-v_n||^2 =2(||u-v_m||^2 +||u-v_n||^2)-4||u - \frac{v_m + v_n}{2}||^2 \le 2(||u-v_m||^2 +||u-v_n||^2) - 4d^2\to 0,$$

pentru $m,n \to\infty$, ceea ce arată că (v_n) este şir Cauchy în H, deci convergent.

Fie $w= \lim\limits_{n\to\infty} v_n\in K$. Limita şirului, w se află în mulțimea K deoarece mulțimea K este închisă.

Cum $v_n \to w$ rezultă că $u - v_n \to u - w$, de unde $||u-v_n||\to||u-w||$.

Deoarece $||u-v_n|| \to d$ va rezulta că $||u-w|| = d$.

Pentru a încheia demonstrația rămâne să mai arătăm că w este unic cu această proprietate.

Presupunem prin absurd că există doua elemente $w_1, w_2 \in K$, $w_1 \ne w_2$ cu proprietatea din enunț, astfel încât $||u-w_1|| =||u-w_2||=d$.

Cum $\frac{w_1 + w_2}{2} \in K$ (când $\lambda=\frac{1}{2}$) vom avea $d \le ||u - \frac{w_1 + w_2}{2}|| = ||\frac{1}{2}(u-w_1)+ \frac{1}{2}(u-w_2)|| \le \frac{1}{2}||u-w_1|| + \frac{1}{2}||u-w_2|| = d$, deci $||u - \frac{w_1 + w_2}{2}|| = d$.

Din identitatea paralelogramului, pentru $x = u - w_1$, $y = u - w_2$ obținem :

$$\|w_1 - w_2\|^2 = 2(\|u-w_1\|^2 + \|u - w_2\|^2) - 4\|u - \frac{w_1 + w_2}{2}\|^2 = 0,$$

deci $w_1 = w_2$, contradicție.

Definiția 1 :

Fie H spațiu Hilbert, $K \subset H$, convexă, închisă, nevidă. Se numeşte operator de proiecție a lui H pe K, operatorul $P_K : H \to K$, $P_K u = w \in K$, cu proprietatea că $\|u - w\| = d(u,K)$.

Teorema 2 (de caracterizare a proiecțiilor) :

Fie H spațiu Hilbert, $K \subset H$, convexă, închisă, nevidă, $u \in H$, $w \in K$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $w = Pu$;

b) $\|u - w\| \leq \|u - x\|$, $(\forall) x \in K$;

c) $\mathrm{Re} < u-w, y-w > \leq 0$, $(\forall) y \in K$;

d) $\mathrm{Re} < u-z, w-z > \geq 0$, $(\forall) z \in K$.

Demonstrație:

Echivalența **a)** $\Leftrightarrow$ **b)** este evidentă.

b) $\Rightarrow$ **c)**.Fie $y \in K$;cum K este convexă rezultă că $(1-\lambda) w + \lambda y \in K$, $(\forall)\lambda \in [0,1]$.

Luând în (b) $x = (1-\lambda) w + \lambda y$, $\lambda \in [0,1]$ obținem :

$\|u-w\|^2 \leq \|u - w - \lambda(y-w)\|^2 = < u-w-\lambda(y-w), u-w-\lambda(y-w) >= \|u-w\|^2 - 2\lambda \mathrm{Re} <u-w,y-w> + \lambda^2\|y-w\|^2$, de unde , $2\mathrm{Re} < u-w, y-w > \leq \lambda \|y-w\|^2$, $(\forall)\lambda \in (0,1]$.

Pentru $\lambda \to 0+$ obținem $\mathrm{Re} <u-w, y-w> \leq 0$.

c) $\Rightarrow$ **d)** Fie $z \in K$; Luând în (**c**) $y = z$ obținem $\mathrm{Re} < u-w, z-w > \leq 0$, sau echivalent $\mathrm{Re} < u-z+z-w, z-w > \leq 0$, de unde $\mathrm{Re} <u-z, z-w> + \|z-w\|^2 \leq 0$, deci $\mathrm{Re}<u-z, z-w> \leq 0$, adică $\mathrm{Re}<u-z, w-z> \geq 0$.

d)$\Rightarrow$ **c)** Fie $y \in K$. Luând în (**d**) $z = (1-\lambda)w + \lambda y$, $\lambda \in [0,1]$ obținem:

$\mathrm{Re} <u-w + \lambda(y-w), w - w - \lambda(y-w)> \geq 0$, de unde $\mathrm{Re} <u-w, y-w> - \lambda \|y-w\|^2 \leq 0$, $(\forall)\lambda \in (0,1]$.

Pentru $\lambda \to 0+$ obținem Re $<u-w, y-w> \leq 0$.

c)⇒ b) Fie $x \in K$. Pentru y=x, din (**c**) obținem:

Re$<u - w, x - w> \leq 0$, sau echivalent Re$<u - w, x - u + u - w> \leq 0$, de unde

Re$<u - w, x - u> + ||u - w||^2 \leq 0$, deci :

$$||u - w||^2 \leq \text{Re}<u - w, u - x> \leq |<u - w, u - x>| \leq ||u - w|| \, ||u - x||$$

şi atunci:

$$||u - w|| \leq ||u - x||.$$

Propoziția 1:

Operatorii de proiecție sunt neexpansivi, adică $||Pu-Pv|| \leq ||u - v||, (\forall)u,v \in H$.

Demonstrație:

Fie $u,v \in H$. Din teorema 2(**c**), pentru w = Pu şi respectiv w = Pv obținem :

$$\text{Re} <u-Pu, y-Pu> \leq 0, (\forall)y \in K \qquad (1)$$

$$\text{Re} <v-Pv, y-Pv> \leq 0, (\forall)y \in K \qquad (2)$$

Luând în (1) y =Pv şi în (2) y =Pu obținem :

$$\text{Re} <u-Pu, Pv-Pu> \leq 0$$

$$\text{Re} <v-Pv, Pu-Pv> \leq 0$$

Adunând cele două inegalități obținem :

Re $<Pu - Pv - (u-v), Pu - Pv> \leq 0$, de unde :

$||Pu - Pv||^2 \leq -$ Re $<u-v, Pu-Pv> \leq |<u-v,Pu-Pv>| \leq ||u - v|| \, ||Pu-Pv||$ şi de aici obținem:

$$||Pu - Pv|| \leq ||u-v||$$

Definiția 2 :

Fie H un spațiu Hilbert şi $M \subset H$, $M \neq \emptyset$. Se numeşte complement ortogonal al lui M, mulțimea :

$$M^{\perp} = \{x \in H: x \perp M\} = \{x \in H: <x, u>=0, (\forall)u \in M\}.$$

Observația 1:

Complementul ortogonal $M^{\perp}$ al unui spațiu hilbert H are următoarele proprietăți:

a) $M^{\perp}$ este un subspațiu liniar închis ;

b) Dacă $M \subset N \Rightarrow N^{\perp} \subset M^{\perp}$

c) $M^{\perp} = \overline{(Sp(A))}^{\perp}$

d) $M \subset M^{\perp\perp}$

e) $M^{\perp\perp\perp} = M^{\perp}$

Verificarea acestor proprietăți se face cu usurință. Prima dintre ele reprezintă propoziția 3 , iar altele dintre ele sunt demonstrate în cadrul problemei 3 de la paragraful Aplicații.

Propoziția 3 :

$M^{\perp}$ este un subspațiu închis în H.

Demonstrație :

Fie $x_1, x_2 \in M^{\perp}$, $\alpha, \beta \in \Lambda$. Pentru $(\forall) u \in M$ avem :

$$\langle \alpha x_1 + \beta x_2, u \rangle = \alpha \langle x_1, u \rangle + \beta \langle x_2, u \rangle = 0, \text{ deci } \alpha x_1 + \beta x_2 \in M^{\perp}.$$

Fie $(x_n) \subset M^{\perp}$, $x_n \to x$, în $\|\cdot\|_H$. Vom arăta că $x \in M^{\perp}$. Din $x_n \in M^{\perp}$, $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}$ avem $\langle x_n, u \rangle = 0$, $(\forall) u \in M$.

Fie $u \in M$, fixat. Cum $|\langle x_n, u \rangle - \langle x, u \rangle| \le \|x_n - x\| \, \|u\| \to 0$, pentru $n \to \infty$,rezultă că $\langle x_n, u \rangle \to \langle x, u \rangle$ adică convergența în normă implică convergența în produs scalar. Cum $\langle x_n, u \rangle = 0$ rezultă $\langle x, u \rangle = 0$ şi cum $u \in M$ este fixat, dar arbitrar luat rezultă $x \in M^{\perp}$.

În continuare considerăm $M \subset H$, subspațiu închis şi $P: H \to M$ operatorul de proiecție. Din teorema de caracterizare a proiecțiilor avem :

$$\mathrm{Re}\langle u - Pu, y - Pu \rangle \le 0, (\forall) y \in M.$$

Pentru $y = Pu \pm \varphi$, $\varphi \in M$, avem $y \in M$ şi atunci $\mathrm{Re}\langle u - Pu, \pm \varphi \rangle \le 0$, $(\forall) \varphi \in M$, de unde rezultă :

$$\mathrm{Re}\langle u - Pu, \varphi \rangle = 0, (\forall) \varphi \in M \qquad (3)$$

Luând $\varphi = ix$, $x \in M$ obținem :

$\mathrm{Re}\langle u - Pu, ix \rangle = 0, (\forall) x \in M$, sau echivalent :

$\mathrm{Re}(-i \langle u - Pu, x \rangle) = 0, (\forall) x \in M$, adică :

$$\mathrm{Im}\langle u - Pu, \varphi \rangle = 0, (\forall) x \in M \qquad (4)$$

Din (3) şi (4) obținem $<u - Pu, \varphi> = 0, (\forall)\varphi\in M$, adică $u - Pu \perp M$, deci :

$$u - Pu \in M^{\perp} \qquad (5)$$

Să observăm că $Pu\in M$ este unic cu proprietatea (5). Într-adevăr, dacă $w\in M$ are proprietatea $u - w\perp M$ rezultă că $<u - w, \varphi> =0, (\forall)\varphi\in M$, deci:

$Re <u-w, y-w> \leq 0, (\forall)\ y\in H$ şi din teorema de caracterizare a proiecțiilor vom avea $w = Pu$.

În concluzie, pentru $(\forall)u\in H$, Pu este unicul element din M cu proprietatea că $u - Pu \perp M$.

Teorema 3.

Fie H spațiu Hilbert, $M\subset H$, subspațiu închis. Atunci orice element $u\in H$ se scrie în mod unic sub forma $u = m + m^{\perp}$, cu $m\in M$ şi $m^{\perp}\in M^{\perp}$, adică $H = M \oplus M^{\perp}$.

Deci spațiul hilbert H reprezintă suma directă dintre subspațiul închis M şi complementul său ortogonal $M^{\perp}$

Demonstrație:

Unicitatea:

Dacă $u = m + m^{\perp} = m_1 + m_1^{\perp}$, cu $m, m_1 \in M, m^{\perp}, m_1^{\perp} \in M^{\perp}$, atunci $m - m_1 = m_1^{\perp} - m^{\perp}$. Cum $m_1^{\perp} - m^{\perp}\in M^{\perp}$ rezultă $m - m_1\in M^{\perp}$ şi atunci $<m - m_1, m - m_1> = 0 \Leftrightarrow ||m - m_1||= 0 \Leftrightarrow m = m_1$.

Existența:

Fie $u\in H$. Atunci $u = (u - Pu) + Pu$. Cum $Pu\in M$ şi $u-Pu\in M^{\perp}$, demonstrația se încheie.

Corolar :

Dacă M este un subspațiu liniar închis al unui spațiu hilbert H , atunci $M=M^{\perp\perp}$.

Într-adevăr , dacă $u\in M^{\perp\perp}$, atunci pe baza teoremei anterioare avem: $u=m +m^{\perp}$, cu $m\in M$ şi $m^{\perp}\in M^{\perp}$. Cum $M\subset M^{\perp\perp}$, rezultă $m^{\perp}=u-m\in M^{\perp\perp}$, deci $m^{\perp}=0$. Prin urmare $u=m\in M$, adică $M^{\perp\perp}\subset M$, de unde rezultă egalitatea dorită.

Teorema 4.

Fie H un spațiu hilbert, M un subspațiu închis al lui H iar $M^{\perp}$, complementul ortogonal al lui M. Fie P operatorul de proiecție al lui H pe M şi Q operatorul de proiecție al lui H pe $M^{\perp}$. Atunci orice element $u \in H$ se reprezintă sub forma :

$$u=Pu+Qu.$$

Teorema 5.

Fie H un spațiu Hilbert, M un subspațiu închis al lui H şi P operatorul de proiecție a lui H pe M. Sunt adevărate următoarele afirmații :

1) P este liniar.

2) P este continuu.

3) $P^2=P$.

4) $<Pu,v>_H=<u,Pv>_H$, u, $v \in H$.

Demonstrație :

1. Fie u şi v două elemente arbitrare din H. Avem :

$$< u - Pu, \varphi >_H = 0 , \ < v - Pv, \varphi >_H = 0 , \ \forall \varphi \in M,$$

de unde prin adunare termen cu termen rezultă :

$$< u + v - (Pu + Pv), \varphi >_H = 0 , \ \forall \varphi \in M.$$

Aşadar, elementul $w=Pu+Pv \in M$ are proprietatea :

$$<u+v-w>_H=0 , \ \forall \varphi \in M$$

Pe de altă parte se ştie că :

$$< u + v - P(u + v), \varphi >_H = 0 , \ \forall \varphi \in M.$$

şi că $P(u+v) \in M$ este singurul element din M cu această proprietate, de unde rezultă :

$$P(u+v)=Pu+Pv$$

Analog se arată că :

$$P(\lambda v)= \lambda P(v), \ \ \forall \lambda \in \Lambda, \ \forall v \in H.$$

2) Continuitatea lui P rezultă din faptul că acesta este neexpansiv :

$$\forall u,v \in H, \ ||Pu-Pv|| \leq ||u-v||$$

De aici rezultă că pentru orice punct $u \in H$ şi pentru orice şir $(u_n) \subset H$ convergent în normă la u avem :

$$||P\, u_n - Pu|| \le ||u_n - u||$$

Deoarece $||u_n - u|| \to 0$, $n \to 0$, rezultă $||P\, u_n - Pu|| \to 0$, $n \to \infty$.

3) Să observăm că orice element $u \in M$ se scrie $u = u + \theta_H$ cu $u \in M$ şi $\theta_H \in M^{\perp}$, ceea ce comparat cu relația din teorema 4, arată că pentru orice element u din M avem :

$$Pu = u,\ Qu = \theta_H .$$

Fie v arbitrar în H. Cum $Pv \in M$, urmează , conform celor de mai sus, P(Pv)=Pv, adică $P^2 = P$.

4) Într-adevăr, pentru orice $u, v \in H$ avem :

$$<Pu,v>=<Pu,Pv+Qv>=<Pu,Pv>= <Pu+Qu,Pv>=<u,Pv>$$

Observația 2

Din proprietatea de neexpansivitate şi din liniaritatea lui P rezultă că ||P||=1. Într-adevăr, pentru orice $u, v \in H$ avem :

$$||Pu-Pv||=||P(u-v)|| \le ||u-v||, \text{ care se mai scrie } ||Pw|| \le ||w||,\ \forall\, w \in H,$$

şi arată că $||P|| \le 1$. Cum pentru orice $u \in M$ avem Pu=u rezultă, mai mult, ||P||=1.

Aplicație:

Fie H un spațiu Hilbert , H_n un subspațiu finit dimensional al său cu dimensiunea n şi u un element din H. Dorim să calculăm distanța de la u la H_n.

Soluție:

Fie $[e_1, \ldots\ldots, e_n] \subset H_n$ un sistem de n vectori liniar independenți şi fie P_n operatorul de proiecție al lui H pe H_n. Vom avea:

$$d(u,H_n) = \inf_{v \in H_n} d(u,v) = \inf_{v \in H_n} ||u - v|| = ||u - P_n u||$$

şi $P_n u$ este unicul element din H_n cu proprietatea că realizează distanța de la u la H_n. Deoarece $P_n u \in H_n$, $P_n u$ se scrie în mod unic astfel:

$$P_n u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$$

Condiția u- $P_n u \perp H_n$ este echivalentă cu:

$$u- P_n u \perp e_j \ , \qquad j=1,\dots n;$$

Deci vom avea $\quad < u- P_n u , e_j >=0 \ , \qquad j=1,\dots,n;$

Ținând seama de scrierea lui $P_n u$, relația anterioară se transformă în:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k < e_k, e_j >=< u, e_j > \quad , \qquad j=1,\dots,n$$

care reprezintă următorul sistem:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 < e_1, e_1 > + \lambda_2 < e_2, e_1 > + \dots + \lambda_n < e_n, e_1 > = < u, e_1 > \\
&\lambda_1 < e_1, e_2 > + \lambda_2 < e_2, e_2 > + \dots + \lambda_n < e_n, e_2 > = < u, e_2 > \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\lambda_1 < e_1, e_n > + \lambda_2 < e_2, e_n > + \dots + \lambda_n < e_n, e_n > = < u, e_n >
\end{aligned}$$

Ştim că $P_n u$ este unicul vector din H_n cu proprietatea:

$$u-P_n u \perp e_j \ , \ j=1,\dots,n;$$

Sistemul de mai sus este un sistem liniar cu necunoscutele $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. De asemenea acest sistem are soluție unică deci determinantul său este nenul.

$$\det\begin{pmatrix} < e_1, e_1 > & < e_2, e_1 > & \dots\dots & < e_n, e_1 > \\ < e_1, e_2 > & < e_2, e_2 > & \dots\dots & < e_n, e_2 > \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ < e_1, e_n > & < e_2, e_n > & \dots\dots & < e_n, e_n > \end{pmatrix} \neq 0$$

Acest determinant se numeşte determinant Gramm al sistemului liniar independent $[e_1,\dots\dots, e_n]$.

Observație:

Determinantul Gramm al unui sistem liniar independent din H este nenul.

Se poate arăta foarte uşor cu ajutorul proprietăților determinanților că dacă sistemul este liniar dependent , determinantul său Gramm este nul , de unde obținem că o condiție necesară şi suficientă pentru ca sistemul $[e_1,\dots\dots, e_n]$ să fie liniar independent este ca determinantul său Gramm să fie nenul.

Revenind la rezolvarea problemei , proiecția lui u pe H_n este definită de $P_n u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$,

$\lambda_1,\dots,\lambda_n$ fiind soluția sistemului considerat mai sus.

1.3. Teorema lui RIESZ

Teorema 1

Fie H un spaţiu Hilbert şi $H^* = \{f:H\to\Lambda$, f liniară şi continuă$\}$.

a) Pentru orice $f\in H^*$ există $u_f\in H$, unic astfel încât pentru orice $v\in H$ avem $f(v) = \langle v,u_f\rangle$ şi $\|f\|_* = \|u_f\|$.

b) Oricărui element $u\in H$ i se poate asocia un element $f_u\in H^*$ astfel încât $(\forall)v\in H$ avem $f_u(v) = \langle v,u\rangle$ şi $\|f_u\|_* = \|u\|$.

Demonstrație:

a) Fie $f\in H^*$.

Unicitatea:

Presupunem prin absurd că există $u_f^1 \neq u_f^2$ astfel încât $f(v) = \langle v,u_f^1\rangle = \langle v,u_f^2\rangle$, $(\forall)v\in H$, de unde $\langle v,u_f^1 - u_f^1\rangle = 0$, $(\forall)v\in H$.

Luând $v = u_f^1 - u_f^2$ obținem $\|u_f^1 - u_f^2\| = 0$, adică $u_f^1 = u_f^2$,ceea ce reprezintă o contradicție.

Existența:

Dacă $f = \theta_{H^*}$, fie $u_f = \theta_H$ şi atunci $f(v) = 0 = \langle v, \theta_H\rangle$, $(\forall)v\in H$.

Fie $f \neq \theta_{H^*}$. Să observăm că $\ker f = \{v\in H: f(v) = 0\}$ este un subspațiu închis în H şi $\ker f \neq H$.

Într-adevăr,dacă $v_1,v_2 \in \ker f$, $\alpha_1,\alpha_2\in\Lambda$ atunci $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)= \alpha_1 f(v_2) +\alpha_2 f(v_2) = 0$, deci $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \ker f$.

Dacă $(v_n)\subset\ker f$ şi $v_n\to v$, cum f este continuă rezultă că $f(v_n)\to f(v)$ şi atunci $f(v) =0$, deci $v\in \ker f$.

Din teorema 3 de la paragraful 1.2 avem $H =\ker f\oplus(\ker f)^\perp$.Cum $\ker f\neq H$, există $w\in(\ker f)^\perp$,$w \neq 0$. Dacă $v\in H$ atunci $f(f(v)w - f(w)v) = f(v)f(w) - f(w)f(v) = 0$, deci

$f(v)w - f(w)v \in \ker f$, $(\forall)\ v\in H$ şi atunci $<f(v)w-f(w)v,w>=0, (\forall)\ v\in H$, adică $f(v)\|w\|^2 -$ $f(w) <v,w> = 0$, $(\forall) v\in H$.

Astfel obținem:

$$f(v) = \frac{f(w)}{\|w\|^2} <v,w> = <v, \frac{\overline{f(w)}}{\|w\|^2} w>, (\forall) v\in H.$$

Luând $u_f = \dfrac{\overline{f(w)}}{\|w\|^2} w$ rezultă $f(v) = <v,u_f>$, $(\forall)v\in H$.

Cum $|f(v)| = |<v,u_f>| \le \|v\|\ \|u_f\|$, $(\forall)v\in H$ rezultă $\|f\|_* \le \|u_f\|$.

Pe de altă parte :

$$\|f\|_* = \sup_{\substack{v\in H\\ v\neq\theta}} \frac{|f(v)|}{\|v\|} \ge \frac{|f(u_f)|}{\|u_f\|} = \|u_f\| \text{ şi în concluzie } \|f\|_* = \|u_f\|.$$

b) Fie $u\in H$ şi $f_u : H\to \Lambda$, $f_u(v) = <v,u>$. Evident f_u este liniară, $|f_u(v)| = |<v,u>| \le \le\|u\|\ \|v\|$, $(\forall)v\in H$, deci f_u mărginită şi în concluzie $f_u\in H^*$.

În plus $\|f_u\|_* \le \|u\|$. Pe de altă parte, pentru $u \neq \theta$ avem $\|f_u\|_* \ge \dfrac{|f_u(u)|}{\|u\|} = \|u\|$ şi demonstrația teoremei se încheie.

Dăm în continuare câteva consecințe importante ale teoremei lui Riesz :

Corolar 1 :

Fie H un spațiu Hilbert şi fie H* dualul său.

Atunci:

1) Aplicația $f\in H^*$, $f \xrightarrow{\Im} u_f \in H$ este un semiizomorfism între H si H* , adică este bijecție şi are următoarele proprietăți:

a) $\Im(f+g)= \Im f+ \Im g$;

b) $\Im(\lambda f)= \overline{\lambda}\ \Im f$;

c) $\|\Im f\|_H =\|f\|_{H^*}$;

2) spațiul H* este spațiu Hilbert cu produsul scalar:

$$<f,g>_{H^*} =<\Im g, \Im f>_H$$

O consecința imediată a acestui corolar este :

Corolar 2:

Spațiile Hilbert sunt reflexive.

1.4. Spații Hilbert separabile

Definiția 1 :

O submulțime $M \subset H$ se numeşte densă în H dacă şi numai dacă pentru orice $u \in H$, există un şir $(u_n) \subset M$ astfel încât $u_n \to u$, sau, echivalent, dacă pentru orice $u \in H$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$, există $v \in M$ astfel încat $\|u-v\| < \varepsilon$.

Definiția 2 :

Se numeşte închidere a unei mulțimi $M \subset H$ mulțimea $\overline{M}$, obținută adaugând la M limitele (în normă $\| \ \|$ din H) tuturor şirurilor convergente formate cu elemente din M.
Ținând seama şi de definiția 1 , observăm că dacă M este o mulțime densă în H, atunci închiderea ei $\overline{M}$ coincide cu H.

Propoziția 1 :

Dacă $M \subset H$ este densă şi $u \in H$, $u \perp M$, atunci $u = \theta_H$.

Demonstrație :

Arătăm că $u \perp M$ implică $u \perp H$. Într-adevăr , fie $v \in H$ şi $(v_n) \subset M$, $v_n \to v$; atunci $<u,v_n>=0, (\forall) n \in N$ şi cum $<u,v_n> \to <u,v>$ rezultă că $<u,v>=0$, deci $u \perp M$. În particular $u \perp u$, adică $<u,u> = 0 \Leftrightarrow \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta_H$.

Definiția 3 :

Un spațiu Hilbert H se numeşte separabil dacă există $M \subset H$ numărabilă şi densă în H.

Definiția 4 :

O familie de elemente $(u_i)_{i\in I} \subset H$ se numeşte totală în H dacă nu există în H elemente nenule ortogonale pe orice element al familiei. Adică , dacă $(u_i)_{i\in I} \subset \subset H$ este o familie totală in H , atunci :

$$<u,u_i> = 0, (\forall) i\in I \Rightarrow u = \theta_H.$$

Observația 1 :

Din definiția 4 şi propoziția 1 rezultă că orice familie densă în H este totală în H.

Definiția 5:

O familie de elemente $(u_i)_{i\in I} \subset H$ se numeşte ortonormală dacă :

$$<u_i, u_j> = \delta_{i\,j} = \begin{cases} 1, & daca \quad i = j \\ 0, & daca \quad i \neq j, \end{cases} \quad (\forall) i, j \in I$$

Este evident că, dacă $(u_i)_{i\in I}$ este o familie ortonormală atunci $u_i \neq \theta_H$, $(\forall)i\in I$ şi elementele u_i, $i \in I$ sunt liniar independente.

Într-adevăr,dacă $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_{i_k} = \theta_H$, unde $\alpha_k \in \Lambda, i_k \in I$,atunci,pentru orice $j = \overline{1,n}$ avem:

$$0 = <\theta_H, u_{i_j}> = <\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_{i_k}, u_{i_j}> = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k <u_{i_k}, u_{i_j}> = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{kj} = \alpha_j$$

Propoziția 2:

Fie $(u_i)_{i\in I} \subset H$ o familie totală şi $W = Sp(u_i)_{i\in I} = \{\sum_{j\in J} \lambda_j u_j : \lambda_j \in \Lambda, J \subset I, \text{finită}\}$.Atunci $\overline{W} = H$.

Demonstrație:

Evident $\overline{W}$ este subspațiu închis în H şi fie $P : H \rightarrow \overline{W}$ operatorul de proiecție a lui H pe $\overline{W}$.

Fie $u \in H$; atunci $u - Pu \in \overline{W}^{\perp}$, deci $u - Pu \perp \overline{W}$.

În particular $<u-Pu, u_i> = 0$, $(\forall)i\in I$. Cum familia $(u_i)_{i\in I}$ este totală în H rezultă $u - Pu = \theta_H$, adică $u = Pu \in \overline{W}$, deci $u \in \overline{W}$. Am demonstrat astfel incluziunea $H \subset \overline{W}$. Cum $\overline{W} \subset H$, demonstrația este încheiată.

Observația 2:

Din această propoziție rezultă că un spațiu Hilbert care posedă o familie totală numărabilă este separabil.

Folosind şi propoziția 1 rezultă că un spațiu Hilbert este separabil dacă şi numai dacă posedă o familie totală numărabilă.

Teorema 1.

Fie H un spațiu Hilbert separabil. Atunci H posedă o familie numărabilă, totală, ortonormală.

Demonstrație:

Conform observației 2, H posedă o familie $(u_n)_{n\in N}$ numărabilă şi totală. Putem presupune că $u_n \neq \theta_H$, $(\forall)n\in N$ şi elementele u_n, $n\in N$ sunt liniar independente.

Într-adevăr, dacă $A =\{u_1,u_2,\ldots\}$ vom extrage din această mulțime o submulțime numărabilă $B =\{u_1', u_2',\ldots\}$ formată din elemente nenule liniar independente astfel ca $spA = spB$.

Fie $(e_n)_{n\in N}$ familia ortonormală corespunzătoare familiei $(u_n)_{n\in N}$, obținută prin procedeul de ortonormalizare Gramm-Schmidt.

Fie $v_1 = u_1$, $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$. Pentru $n \geq 2$, fie $v_n = u_n + \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i v_i$, $\lambda_i\in\Lambda$.

Alegem scalarii λ_i astfel încât $v_n \perp v_j$, $(\forall)j =\overline{1,n-1}$, adică $<u_n +\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i v_i ,v_j> = 0$,

$(\forall)$ $j =\overline{1,n-1} \Leftrightarrow <u_n,v_j> + \lambda_j \|v_j\|^2 = 0$, $(\forall)j =\overline{1,n-1}$.

Evident $v_n \neq 0$, deoarece, în caz contrar ar rezulta că $u_1, u_2,\ldots,u_{n-1}$ sunt liniar dependente.

Va rezulta $\lambda_j = -\frac{< u_n,v_j >}{\|v_j\|^2}$. Luând $e_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$ este evident că familia $(e_n)_{n\in N}$ este ortonormală.

Rămâne să arătăm că familia $(e_n)_{n\in N}$ este totală. Fie $v\in H$ astfel încât $<v,e_n>=0$, $(\forall)n\in N$, deci $<v, u_n+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i v_i > =0 \Rightarrow <v, u_n > = 0$, $(\forall)n\in N$.

Cum $(u_n)_{n\in N}$ este totală rezultă $v = \theta_H$.

Teorema 2.

Fie H un spațiu Hilbert separabil şi $(e_n)_{n\in N}$ o familie numărabilă, ortonormală, totală în H.

Atunci pentru $(\forall)u\in H$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} <u, e_n>e_n$ este convergentă şi $\sum_{n=1}^{\infty} <u, e_n>e_n =$ u. În plus $||u||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |<u, e_n>|^2$.

Demonstrație :

Fie $u\in H$, fixat şi $H_n = Sp[e_1, e_2,\ldots,e_n] = = \{\sum_{k\in I}\alpha_K e_K : \alpha_K\in\Lambda, \ I \subset \{1,2\ldots,n\}\}$. Fie $P_n: H\to H_n$ operatorul de proiecție al lui H pe H_n şi $d_n = d(u,H_n)$.

Din $u - P_n u \perp H_n$ avem $<u - P_n u,e_j> = 0$, $(\forall)j =\overline{1,n}$.

Cum $P_n u\in H_n$ există $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n\in\Lambda$ astfel încât $P_n u = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$, deci :

$$<u,e_j> = < \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i ,e_j>, (\forall)j =\overline{1,n}, \text{ de unde rezultă } \lambda_j = <u,e_j>.$$

Vom avea $P_n u = \sum_{j=1}^{n}< u,e_j > e_j$ şi $d_n^2 = ||u - P_n u||^2 = <u-P_n u, u - P_n u> =$

$$= <u-P_n u, u> - <u -P_n u, P_n u> = <u - P_n u, u> = ||u||^2 - < \sum_{j=1}^{n}< u,e_j > e_j,u> =$$

$$= ||u||^2 - \sum_{j=1}^{n}|< u,e_j >|^2 \geq 0 \text{, deci } \sum_{j=1}^{n}|< u,e_j >|^2 \leq ||u||^2.$$

Notând $s_n = \sum_{j=1}^{n}|< u,e_j >|^2$ vom avea $0 \leq s_n \leq ||u||^2$, $s_n \leq s_{n+1}$, deci $(\exists) \lim_{n\to\infty} s_n \leq ||u||^2$, adică $\sum_{n=1}^{n}|< u,e_n >|^2 \leq ||u||^2$, numită şi inegalitatea lui Bessel.Pentru a arăta prima parte a teoremei este suficient să arătăm că există $\lim_{n\to\infty} P_n u =u$.

Fie $\varepsilon >0$; cum $(e_n)_{n\in N}$ este totală în H, din propoziția 2 avem $\overline{W} =H$, unde $W = =sp(e_n)_{n\in N}$, deci există $v\in W$ astfel încât $||v-u|| < \varepsilon$.

Cum $v\in W$ există $n_\varepsilon\in N$ astfel încât $v\in H_n$ $(\forall)n \geq n_\varepsilon$ şi atunci pentru $(\forall)n \geq n_\varepsilon$ avem $v\in H_n$ şi $||u-P_n u|| \leq ||u-v|| <\varepsilon$, deci $P_n u \to u$, pentru $n\to \infty$.

În concluzie seria $\sum_{n=1}^{\infty} <u, e_n>e_n$ este convergentă şi $\sum_{n=1}^{\infty} <u, e_n>e_n =u$.

Această reprezentare se mai numeşte şi dezvoltarea Fourier generalizată a lui u în raport cu sistemul $(e_n)_{n\in N}$.

Coeficienții $c_n = \langle u, e_n \rangle \in \Lambda$ se numesc coeficienții Fourier (generalizați) ai lui u relativ la familia $(e_n)_{n\in N}$. Din $P_n u = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle e_k$, rezultă:

$$\|P_n u\|^2 = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle e_k , \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} |\langle u, e_k \rangle|^2$$

Cum $\|P_n u\| \to \|u\|$, pentru $n\to\infty$ rezultă că $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2$, numită şi egalitatea lui Parseval.

Exemplu

Sistemul trigonometric $(\varphi_k)_{k\in Z}$, $\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$ este numărabil, ortonormal şi total în $L_2(0,2\pi)$.

Într-adevăr, sistemul trigonometric indicat este ortonormal în $L_2(0,2\pi)$, deoarece avem:

Pentru $m\neq n$,

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle_{L_2(0,2\pi)} = \int_0^{2\pi} \varphi_m(t)\overline{\varphi_n(t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}dt = 0;$$

Pentru m=n,

$$|\varphi_m(t)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|e^{imt}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \quad \|\varphi_m\|^2_{L_2(0,2\pi)} = \int_0^{2\pi} |\varphi_m(t)|^2 dt = 1.$$

1.5. Clase de operatori în spații Hilbert

Fie H un spațiu Hilbert şi $D(A) \subset H$ un subspațiu dens.

Definiția 1

Un operator $A: D(A) \to H$ se numeşte:

a) **simetric** dacă $\langle Au,v\rangle = \langle u,Av\rangle$, $(\forall)u,v \in D(A)$;

b) **pozitiv** dacă $\langle Au,u\rangle \geq 0$, $(\forall)u \in D(A)$;

c) **strict pozitiv** dacă $\langle Au,u\rangle > 0$, $(\forall)u \in D(A)$, $u \neq \theta$;

d) **pozitiv definit** (sau tare pozitiv) dacă există o constantă $\gamma^2>0$ astfel încât $\langle Au,u\rangle \geq \gamma^2 \|u\|^2$, $(\forall)u \in D(A)$.

Dacă A: D (A) $\rightarrow$ H este liniar notăm cu D (A*) = {$v \in H$: $(\exists) v^* \in H$ astfel încât $\langle Au,v \rangle = \langle u,v^* \rangle$, $(\forall) u \in D(A)$}.

Observația 1

$D(A^*) \neq \emptyset$, deoarece $\theta_H \in D(A^*)$(pentru $v=\theta_H$, există $v^*=\theta_H$ cu proprietatea cerută).

Observația 2

v* este unic cu această proprietate. Într-adevăr, dacă există v_1^*, $v_2^* \in H$ astfel încât $\langle u,v_1^* \rangle = \langle u,v_2^* \rangle$, $(\forall) u \in D(A)$, atunci :

$$\langle u,v_1^* - v_2^* \rangle = 0,\ (\forall) u \in D(A),\ \text{adică } v_1^* - v_2^* \perp D(A).$$

Cum $D(A) \subset H$ este dens rezultă $v_1^* - v_2^* = \theta_H$, adică $v_1^* = v_2^*$.

Se verifică imediat că D(A*) este subspațiu în H. Fie $A^*: D(A^*) \rightarrow H$, $A^*v = v^* \in H$, cu proprietatea că $\langle Au,v \rangle = \langle u,v^* \rangle = \langle u,A^*v \rangle$, $(\forall) u \in D(A)$.

Operatorul A* este bine definit, liniar şi se numeşte adjunctul operatorului A.

Într-adevăr, din observația anterioara rezultă că A* este bine definit iar pentru liniaritate, fie $v_1,v_2 \in D(A^*)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$, $v_1^* = A^*v_1$, $v_2^* = A^*v_2$. Vom avea :

$$\langle Au,v_1 \rangle = \langle u,v_1^* \rangle = \langle u,A^*v_1 \rangle,\ (\forall) u \in D(A).$$

$$\langle Au,v_2 \rangle = \langle u,v_2^* \rangle = \langle u,A^*v_2 \rangle,\ (\forall) u \in D(A),$$

de unde,

$$\langle Au, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \rangle = \langle u, \alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^* \rangle = \langle u, \alpha_1 A^*v_1 + \alpha_2 A^*v_2 \rangle,\ (\forall) u \in D(A),\ \text{adică:}$$

$$A^*(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 A^*v_1 + \alpha_2 A^*v_2,\ \text{deci } A^* \text{ este liniar.}$$

Definiția 2.

Un operator $A: D(A) \rightarrow H$ se numeşte **autoadjunct** dacă $A = A^*$.

Propoziția 1.

Fie $D(A) \subset H$ subspațiu dens şi $A: D(A) \rightarrow H$, simetric. Atunci A este liniar.

Demonstrație:

Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$, $u_1,u_2 \in D(A)$, $w \in D(A)$. Atunci :

<A(α_1u$_1$ +α_2u$_2$),w> = <α_1u$_1$ +α_2u$_2$,Aw> = α_1<u$_1$,Aw> + α_2<u$_2$,Aw> = α_1<Au$_1$,w> +α_2<Au$_2$,w> = < α_1Au$_1$ + α_2Au$_2$,w >, deci :

$$< A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 Au_1 - \alpha_2 Au_2, w > = 0$$

Deoarece $w \in D(A)$ este arbitrar luat rezultă $A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 Au_1 - \alpha_2 Au_2 \perp D(A)$ şi cum $D(A) \subset H$ este dens rezultă $A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - \alpha_1 Au_1 - \alpha_2 Au_2 = \theta_H$, adică :

$$A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 Au_1 + \alpha_2 Au_2$$

Observația 3

Dacă $A:D(A) \to H$ este simetric atunci A este o restricție a lui A*, adică $D(A) \subset D(A^*)$ şi $A^*\big|_{D(A)} = A$.

Într-adevăr, fie $v \in D(A)$; atunci există $v^* \in H^*$, $v^* = Av$ astfel încât $<Au,v> = <u,v^*>$, $(\forall) u \in D(A)$, deci $v \in D(A^*)$.Atunci $D(A) \subset D(A^*)$ şi $A^*v = v^* = Av$.

Exemplu

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, deschis, mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^1. Fie H = =$L^2(\Omega)$, D(A) = $C_c^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega),\ \text{supp}\ \varphi = \text{compact} \subset \Omega\}$.

Avem că $C_c^\infty(\Omega) \subset H$, dens în $\|\cdot\|_H$, unde $\|u\|_H^2 = <u,u> = \int_\Omega u^2(x)dx$.

Fie A: D (A) $\to$ H, $Au = -\Delta u = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Pentru orice $u,v \in D(A)$ avem:

$$<Au,v>_H = <-\Delta u, v>_{L^2(\Omega)} = -\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = -\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)v(x)dx =$$

$$= -\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v\right) - \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]dx = -\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v\right)dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx.$$

Din formula lui Green obținem

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v\right)dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v n_i d\sigma = 0,\ i = \overline{1,n}$$ şi atunci:

$$<Au,v>_H = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = < u, -\Delta v >_{L^2(\Omega)} = < u, Av >_H$$, deci A este simetric.

Să reamintim inegalitatea lui Friedrichs: Există o constantă $\gamma^2 > 0$ astfel încât $(\forall)\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ avem :

$$\int_{\Omega} |\operatorname{grad} \varphi(x)|^2 dx \geq \gamma^2 \int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 dx$$

Folosind această inegalitate avem:

$$<Au, u>_H = < -\Delta u,u >_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u(x)|^2 dx \geq \gamma^2 \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx = =\gamma^2$$

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \gamma^2 \|u\|_H^{\ 2}$$, deci operatorul $A = -\Delta$ este pozitiv definit.

Propoziția 2

Fie H spațiu Hilbert complex, $D(A) \subset H$, subspațiu dens şi $A:D(A) \rightarrow H$ un operator liniar.Atunci A este simetric dacă şi numai dacă $<Au,u> \in \mathbf{R}$, $(\forall)u \in D(A)$.

Demonstrație.

"$\Rightarrow$" Pentru $(\forall)u \in D(A)$ avem $<Au,u> = <u,Au> = <\overline{Au,u}>$, deci $<Au,u> \in \mathbf{R}$.

"$\Leftarrow$" Pentru $(\forall)u \in D(A)$ avem:

$$<A(u+v),u+v> - <A(u-v),u-v> = 2<Au,v> + 2<Av,u> \qquad \textbf{(1)}$$

Înlocuind pe v cu iv obținem:

$<A(u+iv),u+iv>-<A(u-iv),u-iv>=2<Au,iv>+2<A(iv),u> = - 2i<Au,v> + 2i<Av,u>$.

Înmulțind ultima relație cu i obținem:

$$i< A(u+iv),u+iv> - i <A(u-iv),u-iv> = 2<Au,v> - 2<Av,u> \qquad \textbf{(2)}$$

Din **(1)** si **(2)** prin adunare se obține :

$$4<Au,v>=<A(u+v),u+v>-<A(u-v),u-v>+i<A(u+iv),u+iv>-i<A(u-iv),u-iv> \qquad \textbf{(3)}$$

Schimbând pe u cu v obținem:

$$4<Av,u> = <A(u+v),u+v>-<A(u-v),u-v> +i<A(v+iu),v+iu>-i<A(v-iu),v-iu>.$$

Cum $<Ax,x> \in \mathbf{R}$, $(\forall)x \in D(A)$, rezultă :

$$4<u,Av>=4<\overline{Av,u}>=$$
$$=<A(u+v),u+v>-<A(u-v),u-v>-i<A(v+iu),v+iu>+i<A(v-iu),v-iu> \qquad \textbf{(4)}$$

Cum $<A(u+iv),u+iv> =<A(i(v-iu)), i(v-iu)> = <A(v-iu),v-iu>$ şi

$<A(u-iv),u-iv>=<A(-i(v+iu)),-i(v+iu)> = <A(v+iu), v+iu>$, din **(3)** şi **(4)** rezultă că $<Au,v> = <u,Av>$,deci A este simetric.

Corolar 1

Fie H spațiu Hilbert complex, D (A) $\subset$ H subspațiu dens,A: D (A) $\rightarrow$ H liniar şi pozitiv. Atunci A este simetric.

Demonstrație:

Este imediată din propoziția 2.

Caracterizarea spațiilor Hilbert

Este interesant să ştim să recunoaştem dacă o normă || || dată pe un spațiu vectorial E este o normă hilbertiană, anume când există un produs scalar < , > pe E astfel încât:

$$\|u\|=<u,u>^{\frac{1}{2}} \quad \text{pentru orice u din E.}$$

Sunt cunoscute diverse criterii :

Teorema (Frechet-Von Neumann-Jordan) :

Presupunem că norma || || satisface identitatea paralelogramului. Atunci || || este o normă hilbertiană.

Teorema (Kakutani):

Presupunem că E este un spațiu normat cu dimE$\geq$3. Presupunem că fiecare subspațiu F de dimensiune 2 are un operator de proiecție de normă 1, adică există un operator de proiecție liniar şi mărginit P :E$\rightarrow$F astfel încât Pu=u pentru orice u$\in$F şi $\|P\|\leq 1$.

Atunci || || este o normă hilbertiană.

Teorema (Karlovitz):

Fie E un spațiu normat de dimensiune dimE$\geq$3. Fie :

Tu=u , dacă $\|u\|\leq 1$ şi Tu=$\frac{u}{\|u\|}$, dacă $\|u\|>1$.

Presupunem că $\|Tu-Tv\|\leq\|u-v\|$, pentru orice u şi v din E.

Atunci || || este o normă hilbertiană.

1.6. Aplicații

1. Să se verifice că, dacă X este un spațiu prehilbertian**,** atunci $|<x,y>|=\|x\|\|y\|$ dacă şi numai dacă x şi y sunt liniari dependenți.

Soluție:

Presupunem că relația din enunț este adevarată şi vrem să demonstrăm că x şi y sunt liniari dependenți.

$|<x,y>|=\|x\|\|y\|$.

Daca $y=0 \Rightarrow y=\theta \cdot x$.

Dacă $y\neq 0$, fie $\lambda=-<x,y>\|y\|^{-2}$.

$\|x+\lambda y\|^2 = <x+\lambda y,x+\lambda y> = <x,x+\lambda y>+<\lambda y,x+\lambda y> =<x,x>+<x,\lambda y>+<\lambda y,x>+ +<\lambda y, \lambda y>=\|x\|^2+\bar{\lambda}<x,y>+\lambda\overline{<x,y>}+\lambda\bar{\lambda}\|y\|^2=\|x\|^2+|\lambda|^2\|y\|^2+2\,\mathrm{re}\,\lambda\overline{<x,y>}$

$|\lambda|=|<x,y>|\|y\|^{-2} \Rightarrow |\lambda|^2=|<x,y>|^2\|y\|^{-4}=\|x\|^2\|y\|^2\|y\|^{-4}=\|x\|^2\|y\|^{-2}$

$\Rightarrow \|x+\lambda y\|^2=\|x\|^2+\|x\|^2+2\,\mathrm{re}\,\lambda\overline{<x,y>}$

$$\mathrm{re}\,\lambda\overline{<x,y>}=\mathrm{re}\,\frac{-<x,y>\cdot\overline{<x,y>}}{\|y\|^2}=\mathrm{re}\,\frac{-|<x,y>|^2}{\|y\|^2}=-\frac{|<x,y>|^2}{\|y\|^2}=-\|x\|^2$$

$\Rightarrow \|x+\lambda y\|^2=\|x\|^2+\|x\|^2-2\|x\|^2=0 \Rightarrow x+\lambda y=0 \Rightarrow x=-\lambda y$, adica x si y sunt liniar dependenti.

Reciproc considerăm că x şi y sunt liniar dependenți şi trebuie să demonstrăm că are loc relația din enunț.

Cazul y=0 este evident.

Presupunem $y\neq 0$. În acest caz $\exists\ \lambda$ astfel încat $x=\lambda y$.

Rezultă $|<x,y>|=|<\lambda y,y>|=|\lambda|\|y\|^2=\|\lambda y\|\|y\|=\|x\|\|y\|$.

2.Să se verifice că orice spațiu prehilbertian este uniform convex.

Soluție:

Folosim definiția spațiului uniform convex.

Un spațiu liniar normat X este uniform convex dacă are următoarea proprietate: pentru orice număr $\varepsilon\in(0,2)$ există un număr $\delta(\varepsilon)\in(0,1)$ astfel încât dacă $\|x\|=\|y\|=1$ şi $\|x-y\|>\varepsilon$, atunci $\frac{1}{2}\|x-y\|<1-\delta(\varepsilon)$.

Ştim că într-un spaţiu prehilbertian are loc identitatea paralelogramului:

$$||x+y||^2+||x-y||^2=2(||x||^2+||y||^2)$$

Deci $||x+y||^2=2(||x||^2+||y||^2)-||x-y||^2$

Presupunem ca $||x||=||y||=1$ si $||x-y||>\varepsilon$.

Rezultă că $-||x-y||^2<-\varepsilon^2$

Înlocuind în relaţia de mai sus obţinem:

$||x+y||^2<4-\varepsilon^2$

Din continuitatea funcţiei radical rezultă că există $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât :

$||x+y||<2-\delta(\varepsilon)$, care este echivalentă cu relaţia din definiţia spaţiului uniform convex. Putem trage concluzia că orice spaţiu prehilbertian este convex.

3. Fie H spaţiu Hilbert , $A\subset H$. Atunci:

a) $A\subset A^{\perp\perp}$.

b) $A^{\perp\perp\perp}=A^{\perp}$

c) A subspaţiu atunci $A^{\perp\perp}=\overline{\overline{A}}$

Soluţie:

a) Fie x un element din A. Pentru a demonstra incluziunea este evident că trebuie să arătăm că $x\in A^{\perp\perp}$.

$A^{\perp\perp}=(A^{\perp})^{\perp}$. Fie acum y un element din $A^{\perp}$. Atunci $<y,x>=0$. Rezultă $x\in (A^{\perp})^{\perp}$.

Adică $x\in A^{\perp\perp}$.

b) Mai întâi să facem următoarea observaţie:

$A\subset B \Rightarrow B^{\perp}\subset A^{\perp}$

Folosind rezultatul demonstrat la a) avem:

$A\subset A^{\perp\perp} \Rightarrow A^{\perp\perp\perp}\subset A^{\perp}$

$A^{\perp}\subset(A^{\perp\perp})^{\perp} \Rightarrow A^{\perp}\subset A^{\perp\perp\perp}$

Din cele două relaţii obţinem egalitatea dorită.

c) A subspaţiu $\Rightarrow$ SpA=A.

Vom folosi $A^{\perp\perp}=\overline{\overline{SpA}}$. Evident $A^{\perp\perp}=\overline{\overline{A}}$.

4. H spaţiu Hilbert, $T:H\rightarrow H$, liniar. Atunci T=0 $\Leftrightarrow <Tx,x>=0$ pentru orice x din H.

Soluţie:

"$\Leftarrow$": Presupunem $<Tx,x>=0$ $\forall x\in H$.

Atunci pentru orice x şi y din H avem:

$<T(x+y),x+y>-<T(x-y),x-y>+i<T(x+iy),x+iy>-i<T(x-iy),x-iy>=0$

$<Tx,x>+<Tx,y>+<Ty,x>+<Ty,y>-<Tx,x>+<Ty,x>+<Tx,y>-<Ty,y>+$

$i(<Tx,x>-i<Tx,y>+i<Ty,x>+<Ty,y>)- i(<Tx,x>+i<Tx,y>-i<Ty,x>+<Ty,y>)=0$

După efectuarea calculelor obținem :

$4<Tx,y>=0 \Rightarrow <Tx,y>=0\ \forall x,y \in H \Rightarrow Tx=0 \Rightarrow T=0.$

"$\Rightarrow$":Evident.

5. Fie H un spațiu Hilbert şi $T \in L(H)$. Dacă presupunem că $\|T\| \leq 1$ atunci $Tx=x$ dacă şi numai dacă $T^*x=x$.

Soluție :

Din ipoteză $Tx=x$. Atunci $<Tx,x>=<x,x>=\|x\|^2$.

Folosind proprietatea operatorului adjunct T^* obținem :

$<Tx,x>=<x, T^*x>$

Folosind inegalitatea lui Cauchy-Schwartz avem :

$<x, T^*x> \leq \|x\|\|T^*x\| \leq \|x\|^2$

Având în vedere cele 2 relații de mai sus rezultă că trebuie să avem în mod necesar egalitate : $<x, T^*x>=\|x\|^2$

Folosind rezultatul de la problema 1 obținem egalitatea dorită adică : $T^*x=x$.

Reciproc daca $T^*x=x$, $Tx=T^{**}x=x$, deoarece $\|T^*\|=\|T\| \leq 1$.

Capitolul 2.Metoda variațională în studiul operatorilor liniari şi pozitiv definiți.

2.1. Teorema variațională fundamentală.

Fie H spațiu Hilbert complex, $D(A) \subset H$, un subspațiu dens al lui H si $A:D(A) \rightarrow H$ liniar, strict pozitiv. Fie $f \in H$. Atunci:

a) Ecuația $Au=f$ are cel mult o soluție;

b) $u_0 \in D(A)$ este soluție a ecuației $Au=f \Leftrightarrow u_0$ minimizează pe D(A) funcționala $F : D(A) \rightarrow \mathbf{R}$, $F(u) =<Au,u>- 2 \operatorname{re} <u,f>$.

Demonstrație :

a) Presupunem prin reducere la absurd că există $u_1, u_2 \in D(A), u_1 \neq u_2$ astfel încât $Au_1 = Au_2 = f$.

Atunci $<Au_1 - Au_2, u_1 - u_2> = <\theta, u_1 - u_2> = 0$, ceea ce este absurd, deoarece :

$$<Au_1 - Au_2, u_1 - u_2> = <A(u_1 - u_2), u_1 - u_2> > 0.$$

b) "$\Rightarrow$" Presupunem că $Au_0 = f$ şi arătăm că $F(u_0) \leq F(u)$, $(\forall) u \in D(A)$.

Pentru $(\forall)$ $u \in D(A)$ avem $F(u) = <Au,u> - 2re<u,f> = <Au,u> - 2re<u,Au_0> = <Au,u> - <u,Au_0> - <\overline{u,Au_0}> = <Au,u> - <u,Au_0> - <Au_0,u> + <Au_0,u_0> -$

$- <Au_0,u_0> = <A(u-u_0),u-u_0> - <Au_0,u_0>$, deci $F(u_0) = - <Au_0, u_0>$ şi atunci:

$$F(u) - F(u_0) = <A(u-u_0), u-u_0)> > 0, (\forall) u \neq u_0$$

"$\Leftarrow$" Fie $u_0 \in D(A)$ astfel încât $F(u_0) \leq F(u)$, $(\forall) u \in D(A)$.

Vom arăta că $Au_0 = f$.

Luând $u = u_0 + tv$, $t \in \mathbf{R}$, $v \in D(A)$ obținem $F(u_0) \leq F(u_0 + tv)$, $(\forall) t \in \mathbf{R}$.

Fie funcția $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\varphi(t) = F(u_0 + tv)$. Atunci $\varphi(0) \leq \varphi(t)$, $(\forall) t \in \mathbf{R}$, deci $t=0$ este punct de minim pentru φ.

Vom avea :

$\varphi(t) = F(u_0 + tv) = <A(u_0 + tv), u_0 + tv> - 2re <u_0 + tv, f> =$

$= <Au_0,u_0> + t(<Au_0,v> + <Av,u_0>) + t^2 <Av,v> - 2re<u_0,f> - 2t\, re<v,f> =$

$= <Au_0,u_0> - 2\, re<u_0,f> + 2t\, re<Au_0 - f, v> + t^2 <Av,v> =$

$= F(u_0) + 2t\, re<Au_0 - f,v> + t^2 < Av, v>$ şi atunci, pentru $t \neq 0$ vom avea

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{F(u_0 + tv) - F(u_0)}{t} = 2\, re <Au_0 - f,v> + t<Av,v>.$$

Rezultă că φ este derivabilă în $t=0$ şi $\varphi'(0) = 2re <Au_0 - f,v>$. Din teorema lui Fermat vom avea $\varphi'(0) = 0$, deci :

$$re<Au_0 - f,v> = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Înlocuind pe v cu iv obținem $re<Au_0 - f,iv> = 0$, deci :

$$im<Au_0 - f,v> = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Din **(1)** şi **(2)** rezultă $<Au_0 - f,v> = 0$, $(\forall) v \in D(A)$, adică $Au_0 - f \perp D(A)$.

Cum $D(A) \subset H$ este dens rezultă $Au_0 = f$ şi demonstrația este încheiată.

2.2 Teorema variațională întărită.

Teorema variațională fundamentală afirmă echivalența între problema rezolvării ecuației $Au=f$ şi aceea a găsirii punctului care minimizează pe $D(A)$ funcționala $F : D(A) \to \mathbf{R}$, $F(u) = \langle Au,u\rangle - 2\,\mathrm{re}\,\langle u,f\rangle$. Interesul, în abordarea pe cale variațională a ecuațiilor operatoriale, este ca, după ce s-a obținut o terorema alternativă de tipul teoremei fundamentale, să se întărească ipotezele acestei teoreme astfel încât să se poată demonstra existența unui punct de minim pentru funcționala ataşată ecuației considerate. Aceasta echivalează cu demonstrarea existenței soluției acestei ecuații iar orice metodă constructivă pentru punctul de minim devine o metodă de construire a soluției ecuației.

Teorema 1. (teorema variațională întărită).

Dacă în teorema variațională fundamentală ipoteza "A strict pozitiv pe D(A)" se înlocuieşte cu ipoteza (mai tare) "A pozitiv definit", adică există o constantă $\gamma^2 > 0$ astfel încât $\langle Au,u\rangle \geq \gamma^2\|u\|^2$, $(\forall)$ $u\in D(A)$, atunci următoarele afirmații suplimentare sunt adevărate:

a) Funcționala F este mărginită inferior pe D(A);

b) Funcțioanala F este uniform convexă pe D(A); mai precis avem:

$(1-\lambda) F (u) + \lambda F (v) - F ((1-\lambda)u + \lambda v)) \geq \gamma^2\lambda (1-\lambda)\|u-v\|^2$, $(\forall)u,v\in D(A)$;

c) Orice şir minimizat pentru F pe D(A) converge în H;

d) Toate şirurile minimizante pentru F pe D(A) au aceeaşi limită în H.

Demonstrație:

a) Pentru $(\forall)$ $u\in D(A)$ avem $F (u) = \langle Au,u\rangle - 2\mathrm{re}\,\langle u,f\rangle \geq$

$\geq \gamma^2 \|u\|^2 - 2\|u\|\|f\| = (\gamma\|u\| - \frac{1}{\gamma}\|f\|)^2 - \frac{1}{\gamma^2}\|f\|^2 \geq -\frac{1}{\gamma^2}\|f\|^2$, deci F este mărginită inferior pe D(A). Fie $l = \inf\limits_{u\in D(A)} F (u) \geq \frac{1}{\gamma^2}\|f\|^2$; atunci există un şir $(u_n)\subset D(A)$ astfel incât $F (u_n) \to l$.

b) Fie $u,v \in D(A)$, $\lambda\in[0,1]$. Vom avea:

$(1-\lambda)F(u)+\lambda F(v)-F((1-\lambda)u+\lambda v)=(1-\lambda)(\langle Au,u\rangle-2\mathrm{re}\langle u,f\rangle)+\lambda(\langle Av,v\rangle-2\mathrm{re}\langle v,f\rangle)- -\langle A((1-\lambda)u+\lambda v),(1-\lambda)u+\lambda v\rangle+2\mathrm{re}\langle(1-\lambda)u + \lambda v,f\rangle = (1-\lambda) \langle Au,u\rangle + \lambda\langle Av,v\rangle - -\langle A((1-\lambda)u+\lambda v), (1-\lambda)u + \lambda v\rangle =$

$=(1-\lambda)<Au,u>+\lambda<Av,v>-(1-\lambda)^2<Au,u>-\lambda^2<Av,v>-\lambda(1-\lambda)<Au,v>-\lambda(1-\lambda)<Av,u>=$ $=\lambda(1-\lambda)<A(u-v),u-v> \geq \gamma^2\,\lambda(1-\lambda)\|u-v\|^2$.

c) Fie $(u_n)\subset D(A)$ şir minimizant pentru F, deci $F(u_n)\to l = \inf\limits_{D(A)} F$. Vom avea :

$$\gamma^2\,\lambda(1-\lambda)\|u_m - u_n\|^2 \leq (1-\lambda)\,F(u_m) + \lambda F(u_n) - F((1-\lambda)u_m + \lambda u_n) \leq$$

$\leq (1-\lambda)\,F(u_m) + \lambda\,F(u_n) - I \to 0$, pentru $m,n\to\infty$, deoacere $F(u_m)\to l$, $F(u_n)\to l$.

Rezultă că (u_n) este şir Cauchy în H, deci convergent.

d) Fie (u_n), $(u_n')\subset D(A)$ două şiruri minimizante pentru F pe D(A). Folosind **b)** vom avea

$$\gamma^2\,\lambda(1-\lambda)\,\|u_n'-u_n\|^2 \leq (1-\lambda)F(u_n') + \lambda\,F(u_n) - F((1-\lambda)\,u_n' + \lambda u_n) \leq$$

$\leq (1-\lambda)\,F(u_n') + \lambda\,F(u_n) - l \to 0$, pentru $n\to\infty$,deoarece $F(u_n') \to l$, $F(u_n)\to l$, deci :

$$\|u_n'-u_n\|\to 0 \text{ pentru } n\to\infty.$$

Cum şirurile (u_n) şi (u_n') sunt convergente în H rezultă că au aceeaşi limită.

Definiția 1.

Se numeşte soluție în sens Sobolev (sau generalizată) a ecuației Au = f, limita în H a oricărui şir minimizant al funcționalei F.

Legătura dintre soluția generalizată şi soluția clasică a ecuației Au=f este dată de următoarea teoremă.

Teorema 2.

1) Soluția în sens clasic este soluție în sens generalizat.

2) Dacă soluția generalizată $u_s\in D(A)$ atunci ea este soluție clasică.

Demonstrație

1) Fie u_0 soluție clasică a ecuației Au=f, deci $u_0\in D(A)$ şi $Au_0 = f$. Din teorema variațională fundamentală , u_0 este punct de minim pentru F pe D(A) şi

$$F(u) - F(u_0) = <A(u-u_0), u-u_0> \geq \gamma^2\,\|u-u_0\|^2,\ (\forall)u\in D(A) \qquad \textbf{(1)}$$

Fie $(u_n)\subset D(A)$ şir minimizant pentru F,deci $F(u_n)\to l = \inf\limits_{D(A)} F$.

Din **(1)**, pentru $u = u_n$ vom avea $F(u_n) - F(u_0) \geq \gamma^2\,\|u_n - u_0\|^2$, $(\forall)n\in\mathbf{N}$.

Cum F $(u_n) \to l = \inf\limits_{D(A)} F = F(u_0)$ (deoarece u_0 este punct de minim pentru F) rezultă că $(\exists)$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$, deci u_0 este soluție generalizată.

2) Fie $u_s \in D(A)$ soluție generalizată pentru F; atunci există un şir $(u_n) \subset D(A)$ astfel încât $u_n \to u_s$ şi $F(u_n) \to l = \inf\limits_{D(A)} F$.

Fie $u,v \in D(A)$. Cum F este uniform convexă este convexă şi atunci:

$$F((1-\lambda)u + \lambda v) \le (1-\lambda) F(u) + \lambda F(v), (\forall)\lambda \in [0,1], \text{ de unde}$$

$$F(v) - F(u) \ge \frac{F((1-\lambda)u + \lambda v) - F(u)}{\lambda}, (\forall)\lambda \in (0,1].$$

Cum $\lim\limits_{\lambda\to 0} \frac{F((1-\lambda)u+\lambda v)-F(u)}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to 0} \frac{F(u+\lambda(v-u))-F(u)}{\lambda} =$

$= 2re\langle Au-f, v-u\rangle$ rezultă că $F(v) - F(u) \ge 2re\langle Au-f, v-u\rangle$.

Luând $v = u_n$ şi $u = u_s$ obținem :

$F(u_n) - F(u_s) \ge 2re\langle Au_s - f, u_n - u_s\rangle$.

Trecând la limită cu $n\to\infty$ obținem $l - F(u_s) \ge 0$, deci $l \ge F(u_s) \ge l$, adică $F(u_s) = l$. Rezultă că u_s este punct de minim pentru F pe D(A) şi conform teoremei variaționale fundamentale rezultă că u_s este soluție clasică.

2.3. O caracterizare variațională a soluției generalizate a ecuației Au=f

Soluția generalizată a ecuației Au=f nu aparține, în general lui D(A). Din acest motiv nu se poate obține o caracterizare variațională(cum avem pentru soluția clasică) a acestei soluții utilizând funcționala F. În scopul obținerii unei astfel de caracterizări vom face următoarea construcție: funcționala F va fi extinsă de la D(A) până la o funcțională $\tilde{F}$: $H_A \to \mathbf{R}$, unde H_A este spațiul energetic ataşat operatorului A.

Teorema 1:(Friedrichs)

Fie $(H,\langle,\rangle)$ un spațiu Hilbert , $D(A)\subset H$ un subspațiu dens şi $A:D(A)\to H$ un operator liniar şi pozitiv definit : $\langle Au,u\rangle \ge \gamma^2 \|u\|^2$, $(\forall)u \in D(A)$, $\gamma^2 > 0$.

Atunci există un operator $\approx{A}:D(\approx{A})\to H$ cu următoarele proprietăți:

1) $\approx{A}$ este o extensie a lui A: $D(A) \subset D(\approx{A})$ şi $\approx{A}\,|_{D(A)} = A$.

2) $\tilde{\tilde{A}}$ este autoadjunct şi $R(\tilde{\tilde{A}})=\{\tilde{\tilde{A}}u \mid u\in D(\tilde{\tilde{A}})\}=H$.

3) $\tilde{\tilde{A}}$ este pozitiv definit şi anume cu aceeaşi constantă ca şi A:

$$<\tilde{\tilde{A}}u,u> \geq \gamma^2 \|u\|^2 , (\forall)u \in D(\tilde{\tilde{A}}).$$

Pentru funcționala extinsă, vom demonstra existența unui punct unic de minim pe H_A, pe care îl vom nota cu u_o şi vom demonstra că $\varphi(u_0)$ este soluția generalizată (în sens Sobolev) a ecuației Au=f, φ fiind injecția liniară şi continuă cu care H_A se scufundă în H.

Introducem pe D(A) un nou produs scalar: $(\forall)u,v \in D(A)$, $<u,v>_{H_A} = <Au,v>_H$, cu norma asociată :

$\|u\|^2_{H_A} = <u,u>_{H_A} = <Au,u>_H \geq \gamma^2 \|u\|^2_H$, de unde rezultă $\|u\|_H \leq \frac{1}{\gamma}\|u\|_{H_A}$, $(\forall)u\in D(A)$.

Fie H_A completatul lui D(A) în $\|\cdot\|_{H_A}$, $H_A = \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_{H_A}}$. Dacă $u\in H_A$, există un şir $(u_n) \subset$ D(A) astfel încât $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} u$, sau echivalent $<A(u_n-u), u_n - u>_H \to 0$.

Observația 1 :

Spațiul $(D(A),\|\cdot\|_{H_A})$ este un spațiu prehilbertian.

Teorema 2.

Spațiul H_A se scufundă în H cu o injecție liniară, continuă şi densă , adică există $\varphi: H_A \to H$, injectivă, liniară astfel încât $\varphi(H_A) \subset H$, dens şi $\varphi|_{D(A)} = =I|_{D(A)}$'.

Demonstrație:

Fie $u\in H_A$; atunci există $(u_n) \subset D(A)$ astfel încât $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} u$, deci (u_n) este şir Cauchy în $\|\cdot\|_{H_A}$,$\|u_m - u_n\|_{H_A} \to 0$, pentru $m,n \to\infty$.

Cum $\|u_m - u_n\|_H \le \frac{1}{\gamma}\|u_m - u_n\|_{H_A}$, $(\forall)$ m,n ≥ 1 rezultă că $\|u_m - u_n\|_H \to 0$, pentru m,n $\to\infty$, adică (u_n) este şir Cauchy în $\|\cdot\|_H$, deci $(\exists)$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \in H$ (în $\|\cdot\|_H$). Definim $\varphi: H_A \to H$, $\varphi(u) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ (în $\|\cdot\|_H$). Avem următoarea schemă:

$$\begin{array}{ccc} D(A) \ni u_n & \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} & u \in H_A \\ & \searrow & \downarrow \varphi \\ & & \varphi(u) \in H \end{array}$$

Arătăm că φ este bine definită, adică limita nu depinde de şirul ales (u_n). Dacă $(u'_n) \subset D(A)$ este un alt şir cu proprietatea că $u'_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} u$, atunci $\|u'_n - u_n\|_H \le \le \frac{1}{\gamma}\|u_n' - u_n\|_{H_A} \to 0$, pentru $n \to \infty$, de unde rezultă că :

$$\lim_{n\to\infty} u'_n = \lim_{n\to\infty} u_n \text{ (în } \|\cdot\|_H).$$

Arătăm că φ este liniară. Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$, $u_1, u_2 \in H_A$. Vom arăta că :

$$\varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \varphi(u_1) + \alpha_2 \varphi(u_2).$$

Fie $(u_n^1) \subset D(A)$, $(u_n^2) \subset D(A)$ astfel încât $u_n^1 \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} u_1$, $u_n^2 \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} u_2$.

Avem următoarea schemă:

$$\begin{array}{ccc} D(A) \ni u_n^1 & \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} & u_1 \\ & \searrow & \downarrow \varphi \\ & & \varphi(u_1) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} D(A) \ni u_n^2 & \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} & u_2 \\ & \searrow & \downarrow \varphi \\ & & \varphi(u_2) \end{array}$$

De aici rezultă că $\alpha_1 u_n^1 + \alpha_2 u_n^2 \xrightarrow{\|\cdot\|_H} \alpha_1 \varphi(u_1) + \alpha_2 \varphi(u_2)$ **(1)**

Pe de altă parte, cum $\alpha_1 u_n^1 + \alpha_2 u_n^2 \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, ținând cont de definiția lui φ rezultă că :

$\alpha_1 u_n^1 + \alpha_2 u_n^2 \xrightarrow{\|\cdot\|_H} \varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)$ **(2)**

Din (**1**) şi (**2**) rezultă că :

$$\varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \varphi(u_1) + \alpha_2 \varphi(u_2).$$

Arătăm în continuare că este φ continuă. Fie $u \in H_A$ şi $(u_n) \subset D(A)$, $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} u$.

Avem $\|u_n\|_H \le \frac{1}{\gamma}\|u_n\|_{H_A}$, $(\forall)$ n $\ge$1, de unde, prin trecere la limită cu $n\to\infty$ obținem $\|\varphi(u)\|_H \le \frac{1}{\gamma}\|u\|_{H_A}$.

Cum $u\in H_A$ este arbitrar luat rezultă că φ este mărginită, deci continuă, fiind liniară.

Dacă $u\in D(A)$ şi $u_n \in D(A)$, $u_n = u$, atunci $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} u$, deci $\varphi(u)=u$, adică $\varphi /_{D(A)} = I/_{D(A)}$.

Din $D(A) \subset H_A$ rezultă $\varphi(D(A)) \subset \varphi(H_A) \subset H$, deci $D(A) \subset \varphi(H_A) \subset H$.

Deoarece D(A) este dens în H, în $\|\cdot\|_H$, rezultă că $\varphi(H_A)$ este dens în H, în $\|\cdot\|_H$.

Pentru a încheia demonstrația rămâne să mai arătăm că φ este injectivă.

Presupunem prin absurd că există u_1, $u_2 \in H_A$, $u_1 \neq u_2$ astfel încât $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$. Din liniaritatea lui φ rezultă că $\varphi(u_1 - u_2) = \theta_H$.

Fie $(u_n) \subset D(A)$ astfel încât $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} u_1 - u_2$. Din definiția lui φ rezultă că $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_H} \varphi(u_1 - u_2) = \theta_H$.

Pentru $(\forall)$ $w \in H$ avem $|\langle u_n, w\rangle_H| \le \|u_n\|_H\|w\|_H \to 0$, pentru $n \to\infty$, deci $\langle u_n, w\rangle_H \to 0$ $(\forall)$ $w \in H$.

Luând w = Av, cu $v\in D(A)$ obținem $\langle u_n, Av\rangle_H \to 0$, $(\forall)$ $v \in D(A)$, sau echivalent

$$\langle u_n,v\rangle_{H_A} \to 0,\ (\forall)\ v \in D(A) \qquad \textbf{(3)}$$

Cum $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} u_1 - u_2$ rezultă că :

$$\langle u_n, v\rangle_{H_A} \to \langle u_1 - u_2, v\rangle_{H_A}\ (\forall)\ v \in H_A \qquad \textbf{(4)}$$

Din (**3**) şi (**4**) rezultă că $\langle u_1 - u_2, v\rangle_{H_A} =0$, $(\forall)$ $v \in D(A)$, adică $u_1 - u_2 \perp D(A) \subset \subset H_A$, dens şi atunci $u_1 = u_2$, contradicție.

Cum $\varphi /_{D(A)} = I/_{D(A)}$, funcționala F se mai scrie:

$F(u) =\langle Au, u\rangle_H - 2re\langle u, f\rangle_H = \|u\|^2_{H_A} - \langle\varphi(u), f\rangle_H - \langle f,\varphi(u)\rangle_H$, $(\forall)u\in D(A)$.

Ultimul membru al egalității are sens pentru $(\forall)u\in H_A$. Aceasta sugerează definirea funcționalei $\tilde{F}:H_A\to \mathbf{R}$, $\tilde{F}(u)=\|u\|^2_{H_A} - \langle\varphi(u), f\rangle_H - \langle f,\varphi(u)\rangle_H$, $(\forall)u\in H_A$ şi evident $\tilde{F}/_{D(A)} = F$, deci $\tilde{F}$ este o prelungire a lui F.

Teorema 3.

În ipotezele de lucru de până acum (adică ale teoremei variaţionale întărite) avem :

a) $\tilde{F}$ are un unic punct de minim global pe H_A, fie acesta u_0.

b) Un şir $(u_n) \subset H_A$ este şir minimizant pentru $\tilde{F}$ pe H_A dacă şi numai dacă $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} u_0$;

c) $\min\limits_{H_A} \tilde{F} = \inf\limits_{D(A)} F$;

d) $\varphi(u_0) = u_s$, deci soluţia generalizată a ecuaţiei $Au = f$ este $\varphi(u_0)$.

Demonstraţie:

a) Fie $F_1: H_A \to \mathbf{C}$, $F_1(u) = <\varphi(u), f>_H$. Cum φ este liniară pe H_A rezultă că şi F_1 este liniară.

Cum $|F_1(u)| \le \|\varphi(u)\|_H \|f\|_H \le \frac{1}{\gamma}\|f\|_H \|u\|_{H_A}$, $(\forall) u \in H_A$ rezultă că F_1 este continuă pe H_A, deci

$F_1 \in H_A^*$ şi $\| F_1\|_{H_A^*} \le \frac{1}{\gamma}\|f\|_H$.

Din teorema lui Riesz există $u_0 \in H_A$, unic astfel încât :

$F_1(u) = <u,u_0>_{H_A}$, $(\forall) u \in H_A$; în plus $\|u_0\|_{H_A} = \| F_1\|_{H_A^*} \le \frac{1}{\gamma}\|f\|_H$.

Pentru $u \in H_A$ vom avea :

$\tilde{F}(u) = <u,u>_{H_A} - <u,u_0>_{H_A} - <u_0,u>_{H_A} = <u-u_0, u-u_0>_{H_A} - <u_0, u_0>_{H_A} = \|u - u_0\|^2_{H_A} - \|u_0\|^2_{H_A}$

şi atunci :

$\tilde{F}(u) - \tilde{F}(u_0) = \|u-u_0\|^2_{H_A} > 0$, $(\forall) u \in H_A$, $u \neq u_0$.

Atunci $\min\limits_{H_A} \tilde{F} = \tilde{F}(u_0) = -\|u_0\|^2_{H_A} \ge -\frac{1}{\gamma}\|f\|^2_H$.

b) Rezultă imediat din a).

Să observăm că există şiruri minimizante pentru $\tilde{F}$ formate cu elemente din D(A).

Într-adevăr, cum $u_0 \in H_A$ există $(u_n) \subset D(A)$ astfel încât $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} u_0$. Din prima parte a demonstraţiei avem $\tilde{F}(u_n) \to \tilde{F}(u_0) = \min\limits_{H_A} \tilde{F} = \inf\limits_{H_A} \tilde{F}$.

c) $\min\limits_{H_A} \tilde{F} = \inf\limits_{H_A} \tilde{F} \le \inf\limits_{D(A)} \tilde{F} = \inf\limits_{D(A)} F = l$.

Fie $(u_n) \subset D(A)$ astfel încât $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} u_0$. Folosind prima parte a demonstrației vom avea $F(u_n) = \tilde{F}(u_n) \to \tilde{F}(u_0) = \min_{H_A} \tilde{F}$.

Cum $F(u_n) \geq l$ rezultă că $\min_{H_A} \tilde{F} \geq l$ şi în concluzie $\min_{H_A} \tilde{F} = l$.

d) Fie $u_0 \in H_A$ punctul de minim a lui $\tilde{F}$ şi $(u_n) \subset D(A)$, $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} u_0$.

Din b) rezultă că (u_n) este şir minimizant pentru $\tilde{F}$, deci

$F(u_n) = \tilde{F}(u_n) \to \tilde{F}(u_0) = \inf_{D(A)} \tilde{F}$, adică (u_n) este şir minimizant pentru F pe D(A).Conform definiției lui φ va rezulta că $\varphi(u_0) = u_s$

Vom extinde operatorul A la un operator $\tilde{A}$ astfel încât u_s să fie soluție clasică pentru ecuația $\tilde{A} u = f$.

Fie $G: H \to H_A$, $Gf = u_{0,f} \in H_A$, unde $u_{0,f}$ este unicul element din H_A (din teorema lui Riesz) cu proprietatea $\langle \varphi(u), f\rangle_H = \langle u, u_{0,f}\rangle_H$, $(\forall) u \in H_A$.

Teorema 4.

a) Operatorul G este liniar, continuu şi injectiv;

b) $G^{-1}: G(H) \to H$ extinde A.

Demonstrație:

a) Pentru $(\forall) f \in H$, $Gf \in H_A$ are proprietatea:

$$\langle \varphi(u), f\rangle_H = \langle u, Gf\rangle_{H_A}, \ (\forall) u \in H_A \qquad \textbf{(1)}$$

<u>G liniar</u> : Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$, $f_1, f_2 \in H$. Atunci $G(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \in H_A$ are proprietatea

$\langle \varphi(u), \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\rangle_H = \langle u, G(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\rangle_{H_A}$, $(\forall) u \in H_A$.

Cum $\langle \varphi(u), \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\rangle_H = \overline{\alpha_1} \langle \varphi(u), f_1\rangle_H + \overline{\alpha_2} \langle \varphi(u), f_2\rangle_H =$

$= \overline{\alpha_1} \langle u, Gf_1\rangle_{H_A} + \overline{\alpha_2} \langle u, Gf_2\rangle_{H_A} = \langle u, \alpha_1 Gf_1\rangle_{H_A} + \langle u, \alpha_2 Gf_2\rangle_{H_A} = \langle u, \alpha_1 Gf_1 + \alpha_2 Gf_2\rangle_{H_A}$ va rezulta că $G(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 Gf_1 + \alpha_2 Gf_2$, deci G este liniar.

<u>G continuu</u> : Fie $f \in H$; atunci $\|Gf\|_{H_A} = \|u_{0,f}\|_{H_A} = \|F_1\|^*_{H_A} \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_H$.

<u>G injectiv</u> : Fie $f \in H$ astfel încât $Gf = \theta_{H_A}$.

Atunci $<\varphi(u), f> = 0$, $(\forall)u \in H_A$, adică $f \perp \varphi(H_A)$. Cum $\varphi(H_A)$ este dens în H rezultă că $f = \theta_H$, deci G este injectiv.

b) Fie $u_0^* \in D(A)$ şi funcționala $F_* : D(A) \to \mathbf{R}$,

$$F_*(u) = <Au,u>_H - <Au_0^*,u>_H - <u,Au_0^*>_H = <A(u-u_0^*), u - u_0^*>_H - < Au_0^*, u_0^* >_H.$$

Evident avem :

$$\min_{D(A)} \tilde{F}_* = F_*(u_0^*) = - <Au_0^*, u_0^*>_H$$

Pe de altă parte, conform teoremei **3** avem :

$$\min_{H_A} \tilde{F}_* = \inf_{D(A)} \tilde{F}_* = F_*(u_0^*) = \tilde{F}_*(u_0^*).$$

Cum unicul punct care realizează minimul lui F_* pe H_A este $G(A u_0^*)$ rezultă :

$$G(A u_0^*) = u_0^*, \text{ deci } A u_0^* = G^{-1} u_0^* .$$

Consideram acum operatorul : $\varphi \circ G : H \to H$

Teorema 5 (von Neumann)

Fie A un operator autoadjunct definit pe tot H. Daca A^{-1} există, atunci A^{-1} este, de asemenea, autoadjunct.

Teorema 6

a) Operatorul $(\varphi \circ G)$ este liniar, mărginit şi autoadjunct;

b) $\varphi \circ G : H \to \varphi(G(H))$ este inversabil;

c) $(\varphi \circ G)^{-1} : \varphi(G(H)) \to H$ este o extensie autoadjunctă a lui A.

d) $(\varphi \circ G)^{-1}$ rămâne pozitiv definit, cu aceeaşi constantă γ^2 ca A:

$$< (\varphi \circ G)^{-1} v, v >_H \geq \gamma^2 \| v \|_H{}^2, \forall v \in \varphi(G(H)).$$

Demonstrație:

a) ($\varphi \circ G$) este liniar pentru că φ şi G sunt operatori liniari. Mai mult , $(\varphi \circ G)$ este mărginit pe H.Într-adevar :

$$\forall f \in H, \| \varphi(Gf) \|_H \leq \frac{1}{\gamma} \| Gf \|_{H_A} \leq \frac{1}{\gamma^2} \| f \|_{H.}$$

Operatorul $(\varphi \circ G)$ este simetric pe baza propoziției **2** de la paragraful **1.5.**(Clase de operatori în spații Hilbert.)

$$\forall f \in H, <(\varphi \circ G) f, f>_H = <\varphi(Gf), f>_H = <Gf, Gf>_{H_A} = \| Gf \|_{H_A}^2 \geq 0.$$

Fiind simetric şi definit pe tot H, operatorul $\varphi \circ G$ este autoadjunct.

b) Rezultă ținând seama că G este inversabil iar φ este injectivă.

c) $(\varphi \circ G)^{-1}$ este autoadjunct pentru că este inversul operatorului $\varphi \circ G$ care este autoadjunct, mărginit şi definit pe tot H.(conform teoremei **5** din acest paragraf.)

Vom arăta că $(\varphi \circ G)^{-1}$ extinde pe A: $(\varphi \circ G)^{-1}|_{D(A)} = A.$ Într-adevăr, avem $D(A) \subset D(G^{-1}) = G(H)$, din care rezultă :

$D(A) = \varphi(D(A)) \subset \varphi(D(G^{-1})) = \varphi(G(H))$.

De aici, ținând seama că $\varphi|_{D(A)} = I|_{D(A)}$, rezultă :

$$(\varphi \circ G)^{-1}|_{D(A)} = G^{-1} \circ \varphi^{-1}|_{D(A)} = G^{-1}|_{D(A)} = A.$$

Deoarece $R[(\varphi \circ G)^{-1}] = H$, rezultă că pentru orice $f \in H$, ecuația : $(\varphi \circ G)^{-1}u = f$ are soluție (unică), anume $u = \varphi(Gf) = \varphi(u_0)$.

Dar , conform teoremei **3** punctul **d) ,** $\varphi(u_0)$ este soluția generalizată (în sens Sobolev) a ecuației Au=f.

d) Într-adevăr, pentru orice $v \in \varphi(G(H))$ există $u \in G(H) = D(G^{-1})$ astfel încât $v = \varphi(u)$.Atunci :

$$<(\varphi \circ G)^{-1} v, v>_H = <G^{-1} u, \varphi(u)>_H = \| u \|_{H_A}^2 \geq \gamma^2 \| \varphi(u) \|_H^2 = \gamma^2 \| v \|_H^2$$

În continuare considerăm operatorul $\tilde{A} = (\varphi \circ G)^{-1} : \varphi(G(H)) \to H$.

Teorema 7.

Dacă A este un operator liniar, pozitiv definit de la un subspațiu dens al unui spațiu hilbert complex cu valori în acelaşi spațiu, atunci operatorul :

$\tilde{A} = (\varphi \circ G)^{-1} : \varphi(G(H)) \to H$, unde φ este injecția de scufundare a lui H_A în H iar G este operatorul considerat în teorema anterioară, are următoarele proprietăți :

a) $\tilde{A}$ extinde pe A : $\tilde{A}|_{D(A)} = A$;

b) $\tilde{A}$ rămâne pozitiv definit cu aceeaşi constantă γ^2 ca A.

c) Pentru orice $f \in H$, soluția clasică a ecuației $\tilde{A} u = f$ este soluția generalizată a ecuației $Au = f$;

d) $\tilde{A}$ este surjectiv;

Demonstrație:

a) Cum $D(A) \subset G(H)$ rezultă: $D(A) = \varphi(D(A)) \subset \varphi(G(H)) = D(\tilde{A})$, deci $D(A) \subset D(\tilde{A})$.

Dacă $u \in D(A)$, din teoremele **2** şi **4** vom avea:

$\tilde{A}u = (\varphi \circ G)^{-1}(u) = G^{-1}(\varphi(u)) = G^{-1}u = Au$.

b) Fie $u \in D(\tilde{A}) = \varphi(G(H))$ şi $f = \tilde{A}u$. Vom avea $<\tilde{A}u, u>_H = < f, \varphi(Gf)>_H = = \|Gf\|_{H_A}^2 \geq \gamma^2 \|\varphi(Gf)\|_H^2 = \gamma^2 \|u\|_H^2$

c) Fie $f \in H$. Deoarece $\tilde{A}$ este surjectiv ecuația $\tilde{A}u = f$ are soluție, care este unică deoarece, în plus $\tilde{A}$ este injectiv şi fie u_0 această soluție. Vom avea:

$u_0 = \varphi(Gf) = \varphi(u_{0,f}) = u_s$, din teorema **3**, deci soluția unică a ecuației $\tilde{A}u = f$ este soluție generalizată a ecuației $Au = f$.

d) Fie $f \in H$. Luând $u = (\varphi \circ G) f \in \varphi(G(H)) = D(\tilde{A})$, rezultă $\tilde{A}u = (\varphi \circ G)^{-1} (\varphi \circ G)(f) = f$, deci $\tilde{A}$ este surjectiv.

2.4.Metoda Ritz pentru calculul soluției generalizate în cazul $H_{G^{-1}}$ separabil

În cadrul acestui paragraf vom prezenta metoda Ritz pentru calculul soluției generalizate în cazul $H_{G^{-1}}$ separabil.

Presupunem că $H_{G^{-1}}$ este separabil şi fie $(\varphi_n) \subset H_{G^{-1}}$ un sistem ortonormal, total în $H_{G^{-1}} = H_A$. Dacă u_0 este punctul de minim a lui $\tilde{F}$ pe $H_{G^{-1}} = H_A$ atunci $u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} <u_0, \varphi_n>_{H_A} \varphi_n$.

Ținând cont de definiția lui G avem:

$$< \varphi(u),f>_H = <u,u_0>_{H_A} = <u, Gf>_{H_A} ,(\forall)u \in H_A.$$

Pentru $u = \varphi_n$ obținem :

$$< \varphi(\varphi_n),f>_H = <\varphi_n, u_0>_{H_A} \text{ şi atunci } u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} <f, \varphi(\varphi_n)>_H \varphi_n,$$

de unde rezultă că :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} <f, \varphi(\varphi_K)>_H \varphi_K \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} u_0, \text{ pentru } n\to\infty.$$

Cum $u_0 \in H_A$, $u_n \in H_A$, $(\forall)$ $n \geq 1$ şi $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} u_0$, din teorema **3** rezultă că (u_n) este şir minimizant pentru $\tilde{F}$ pe $H_A = H_{G^{-1}}$.

Cum $\varphi : H_A \to H$ este o injecţie continuă rezultă că :

$$\varphi(u_n) = \sum_{k=1}^{n} <f, \varphi(\varphi_K)>_H \varphi_K \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} \varphi(u_0), \text{ pentru } n\to\infty,$$

deci $(\varphi(u_n))$ converge către $\varphi(u_0) = u_s$, soluţia generalizată a ecuaţiei $Au = f$.

Să ne reamintim că şirul (φ_n) poate fi ales chiar din D(A). În acest caz, dacă $(\varphi_n) \subset D(A)$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} <f,\varphi_K>_H \varphi_K \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} u_0$ şi $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{H_A}} \varphi(u_0)$ atunci (u_n) este şir minimizant şi pentru F , nu numai pentru $\tilde{F}$.

În cele ce urmează vom formula o condiţie suficientă pentru a avea separabilitatea lui $H_{G^{-1}}$, deci valabilitatea rezultatelor obţinute în acest paragraf.

Lema 1.

Dacă $(G^{-1}\varphi_n)_n$ este total în H , atunci (φ_n) este total în $H_A \equiv H_{G^{-1}}$.

Demonstraţie:

Deoarece $D(G^{-1})$ este dens în $H_{G^{-1}}$, este suficient să demonstrăm că subspaţiul generat de (φ_n) este dens în $D(G^{-1})$.

Fie v un element arbitrar din $D(G^{-1})$. Deoarece $G^{-1}v \in H$ şi $(G^{-1}\varphi_n)$ este total în H, pentru orice $\varepsilon > 0$ există numerele $\alpha_1, ..., \alpha_n$ astfel încât:

$$\| G^{-1}v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k G^{-1}\varphi_k \|_H = \| G^{-1}(v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k) \|_H < \varepsilon\gamma.$$

Dar: $$\| v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \|_{H_A} = \| G[G^{-1}(v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k)] \|_{H_A} \leq \| G \| \cdot \| G^{-1}(v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k)] \|_H < \frac{1}{\gamma}\varepsilon\gamma = \varepsilon,$$

ceea ce demonstrează afirmaţia.

Teorema 1 :

Dacă H este separabil, atunci $H_{G^{-1}}$ este de asemenea separabil.

Demonstrație :

Fie (ψ_n) un sistem total în H. Există $\varphi_n \in D(G^{-1})$ astfel încât $G^{-1}\varphi_n = \psi_n$, $\forall$ n. Conform lemei de mai sus (φ_n) este total în $H_{G^{-1}}$.

Propoziția 1

Avem :

$$\min_{u\in D(G^{-1})} \tilde{F}(u) = \min_{u\in H_A} \tilde{F}(u) = \tilde{F}(u_0) = \inf_{u\in D(A)} F(u).$$

Demonstrație :

Într-adevăr, deoarece : $D(A) \subset D(G^{-1}) \subset H_A$, avem :

$$\inf_{u\in D(A)} F(u) \geq \inf_{u\in D(G^{-1})} \tilde{F}(u) \geq \inf_{u\in H_A} \tilde{F}(u) = \tilde{F}(u_0)$$

şi este suficient să se țină seama că:

$$\min_{u\in H_A} \tilde{F}(u) = \inf_{u\in D(A)} F(u).$$

Mai mult, deoarece punctul de minim al lui $\tilde{F}$ pe H_A este $u_0 = Gf \in D(G^{-1})$, obținem :

$$\min_{u\in D(G^{-1})} \tilde{F}(u) = \min_{u\in H_A} \tilde{F}(u) = \tilde{F}(u_0)$$

şi problema de a găsi punctul de minim al lui $\tilde{F}$ pe H_A poate fi redusă la aceea de a găsi punctul de minim al lui $\tilde{F}$ pe $D(G^{-1})$.

Pe $D(G^{-1})$ funcționala $\tilde{F}$ are forma:

$$\forall u \in D(G^{-1}),\ \tilde{F}(u) = \langle G^{-1}u, \varphi(u)\rangle_H - \langle \varphi(u), f\rangle_H - \langle f, \varphi(u)\rangle_H .$$

Fie H separabil. Atunci $H_{G^{-1}}$ este, de asemenea, separabil.Fie (ψ_n) un sistem total în $H_{G^{-1}}$ şi fie E^n subspațiul finit dimensional generat de $\psi_1, \ldots, \psi_n$, presupuse liniar independente.Fie u_n punctul de minim al lui $\tilde{F}$ pe E^n. Pentru existența şi unicitatea lui u_n este suficient să ținem seama că, $\tilde{F}$ este strict convexă, slab inferior semicontinuă şi coercivă. Avem :

$$(\mathbf{D}\tilde{F})(u_n)\cdot h = \frac{d}{dt}\tilde{F}(u+th)|_{t=0} = 2\operatorname{Re}\langle G^{-1}u - f, \varphi(h)\rangle_H, \forall u, h \in D(G^{-1})$$

Punctul $u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\psi_i \in E^n \subset D(G^{-1})$ este un punct de minim pentru $\tilde{F}$ pe E^n dacă şi numai dacă :

$(\mathbf{D}\tilde{F})(u_n)\cdot h = 0$, $\forall h \in E^n$, adică :

$$\text{Re} < G^{-1}u_n - f, \varphi(h) >_H = 0, \forall h \in E^n$$

Dacă schimbăm h cu ih, vom obține :

$\text{Im} < G^{-1}u_n - f, \varphi(h) >_H = 0, \forall h \in E^n$, adica $< G^{-1}u_n - f, \varphi(h) >_H = 0, \forall h \in E^n$

Dacă în ultima relație de mai sus h=ψ_j, j=1,.......,n şi înlocuim u_n ($u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\psi_i \in E^n \subset D(G^{-1})$) , obținem:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < G^{-1}\psi_i, \varphi(\psi_j) >_H = < f, \varphi(\psi_j) >_H, \qquad \text{j=1,...,n,} \qquad \mathbf{1.}$$

sau :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \psi_i, \psi_j >_{H_{G^{-1}}} = < f, \varphi(\psi_j) >_H, \qquad \text{j=1,...,n.} \qquad \mathbf{2.}$$

Deoarece matricea acestui sistem este exact matricea Gramm a elementelor liniar independente ψ_i, i=1,....,n, sistemul **2** sau **1** are soluție unică.

Fie u_n dat de relația $u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\psi_i$, unde a_i, i=1,2,...,n este soluția sistemului **1.**

Deoarece : $E^1 \subset E^2 \subset .... \subset E^n \subset .... \subset D(G^{-1})$, avem :

$$\min_{E^1} \tilde{F} = \tilde{F}(u_1) \geq \min_{E^2} \tilde{F} = \tilde{F}(u_2) \geq ... \geq \min_{E^n} \tilde{F} = \tilde{F}(u_n) \geq ... \geq \min_{D(G^{-1})} \tilde{F} = \tilde{F}(u_0).$$

Şirul $\tilde{F}(u_n)$ fiind monoton descrescător şi mărginit inferior, este convergent. Există deci $\lim_{n\to\infty} \tilde{F}(u_n)$. Problema care se pune este dacă :

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{F}(u_n) = \tilde{F}(u_0) = \min_{H_{G^{-1}}} \tilde{F},$$

cu alte cuvinte, dacă (u_n) este şir minimizant pentru $\tilde{F}$. Raspunsul este unul afirmativ : şirul $u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\psi_i$ cu a_i, i=1,.....,n soluția sistemului **2.** este şir minimizant pentru $\tilde{F}$. Pentru demonstrația acestui fapt vom prezenta în continuare :

Metoda Ritz ca metodă de proiecție.

Fie $u_0 \in D(G^{-1}) \subset H_{G^{-1}}$ punctul de minim al lui $\tilde{F}$ pe $H_{G^{-1}}$.Vom arăta că dacă u_n este cel furnizat de procedeul Ritz, atunci $u_n = P_n u_0$, $\forall n \in N$, unde cu P_n s-a notat operatorul de proiecție al lui $H_{G^{-1}}$ pe $E^n = Sp[\psi_1, \ldots\ldots, \psi_n]$. Într-adevăr :

$$P_n u_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \psi_i \text{, unde } a_i \text{, i=1,.....,n soluția sistemului:}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \psi_i, \psi_j >_{H_{G^{-1}}} = < u_0, \psi_j >_{H_{G^{-1}}} = < f, \varphi(\psi_j) >_H \text{, j=1,.......,n.}$$

Acest sistem este exact sistemul **2.** obținut prin procedeul Ritz, ceea ce demonstrează aserțiunea.

2.5. Un caz particular (important) de determinare a unei baze în H_A

Raționamentul din paragraful anterior arată că în cazul în care $H_A = H_{G^{-1}}$ este separabil (lucru care se întâmplă dacă H este separabil), utilizarea procedeului Ritz pentru construirea unui şir minimizant pentru $\tilde{F}$ este condiționată de cunoaşterea unui sistem numărabil total în H_A.Problema determinării unei baze în H_A este o problemă dificilă. Au fost obținute în această direcție rezultate importante. Aici vom da un caz particular.Rezultatele ce vor fi obținute pe acest caz particular dau o imagine despre complexitatea problemei corespunzătoare cazului general.

Fie $D(A)=R^n$ şi fie $A:D(A)= R^n \to R^n$ identificat cu o matrice simetrică şi pozitiv definită, având n linii şi n coloane. Fie $f \in R^n$. Să considerăm problema de minim pe R^n pentru funcționala pătratică:

$$u \in R^n,\ F(u) = <Au,u>_{R^n} - 2<f,u>_{R^n} \qquad (\mathbf{1})$$

Conform teoremei variaționale fundamentale, a minimiza F pe R^n este echivalent cu găsirea soluției u_0 a ecuației:

$$Au=f.$$

Să considerăm spațiul energetic H_A al matricei A, care este R^n normat cu norma $\| \ \|_A$ generată de produsul scalar:

$$u,v \in R^n,\ <u,v>_A = <Au,v>_{R^n}.$$

Dacă cunoaştem o bază în H_A formată din vectori ortonormați, cu alte cuvinte dacă cunoaştem n vectori $w_0,\ldots\ldots\ldots,w_{n-1}$ cu proprietatea:

$$< w_i, w_j >_A = < Aw_i, w_j >_{R^n} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, dacai = j, \\ 0, dacai \neq j \end{cases},$$

atunci , conform formulei (**1**), u_0 este dat de:

$$u_0 = \sum_{j=0}^{n-1} < f, w_j >_{R^N} w_j. \qquad (\mathbf{2})$$

Pe de altă parte , u_0 fiind soluția ecuației Au=f, avem:

$$u_0 = A^{-1} f \qquad (\mathbf{3})$$

Dacă comparăm relațiile (**2**) şi (**3**) , vom obține:

$$A^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} w_j \cdot w^*_j ,$$

aşadar cunoaşterea unei baze ortonormate în H_A înseamnă şi cunoaşterea lui A^{-1}.

Dacă vectorii $w_0,\ldots\ldots\ldots,w_{n-1}$ nu sunt ortonormați ci doar ortogonali în produsul $< , >_A$(sau, cum se mai numesc în acest caz, A-conjugați), adică dacă:

$$< w_i . w_j >_A = < Aw_i, w_j >_{R^n} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ \neq 0, i = j \end{cases},$$

atunci $w_0,\ldots\ldots\ldots,w_{n-1}$ fiind nenuli, formează o bază în R^n, iar u_0 se scrie:

$$u_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i w_i$$

şi determinarea lui se reduce la determinarea numerelor α_i. Dar A u_0=f, ceea ce este echivalent cu:

$$< Au_0, w_j >_{R^n} = < f, w_j >_{R^n},\ j=0,1,\ldots\ldots.,n-1.$$

deci cu:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i < Aw_i, w_j >_{R^n} = < f, w_j >_{R^n},\ j=0,1,\ldots\ldots\ldots,n-1.$$

Dacă ținem seama că: $<Aw_i,w_j>=0$, i≠j obținem:

$$\alpha_j = \frac{< f, w_j >_{R^n}}{< Aw_j, w_j >_{R^n}},\ j=0,1,\ldots\ldots..,n-1.$$

astfel încât:

$$u_0 = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{< f, w_j >_{R^n}}{< Aw_j, w_j >} w_j = A^{-1} f.$$

De aici rezultă, în particular, că:

$$A^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{w_j \cdot w^*{}_j}{w^*{}_j \cdot (Aw_j)}.$$

Aşadar, cunoaşterea unei baze formate din vectori A-conjugati permite inversarea matricei simetrice şi pozitiv definite A după formula de mai sus:

$$A^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{w_j \cdot w^*{}_j}{w^*{}_j \cdot (Aw_j)}.$$

2.6. Algoritm pentru determinarea unei baze formate din vectori A-conjugați în $\mathbf{R}^n$

Algoritmul are următoarea idee. Să considerăm R^n înzestrat cu produsul scalar < , > şi sistemul liniar independent $e_1,\ldots,e_n$ reprezentând baza canonică din R^n.

Conform procedeului de otonorormalizare Gramm-Schmitd , sistemului $e_1,\ldots, e_n$ i se poate asocia un sistem $p_1,\ldots,p_n$ ortogonal în raport cu produdul scalar < , >, adică un sistem de vectori A-conjugați.

Procedeul de ortonormalizare Gramm-Schmitd a fost folosit în demonstrația teoremei 1 de la paragraful 1.4 (Spații Hilbert separabile). Conform procedeului Gramm vectorii sunt definiți astfel:

$$p_1 = e_1$$

$$p_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\| p_i \|^2} < e_{k+1}, p_i > p_i$$

Din punct de vedere al calculului efectiv formulele de mai sus prezintă dezavantajul că pentru calcularea lui p_{k+1} este necesară cunoaşterea tuturor vectorilor anteriori $p_1,\ldots\ldots p_k$.

Raționamentul care urmează, bazat pe o idee a lui Altman , are drept scop să elimine acest dezavantaj. Deci relațiile de mai sus pot fi scrise astfel:

$$
\begin{aligned}
e_1 &= p_1 \\
e_2 &= \gamma_{21} p_1 + p_2 \\
e_3 &= \gamma_{31} p_1 + \gamma_{32} p_2 + p_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e_n &= \gamma_{n1} p_1 + \gamma_{n2} p_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \gamma_{n,n-1} p_{n-1} + p_n
\end{aligned}
$$

Pentru a determina vectorii $p_1,\ldots\ldots,p_n$ este suficient să cunoaştem matricea:

$$
\Gamma = \begin{pmatrix}
1 & & & & \\
\gamma_{21} & 1 & & & \\
\gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 & & \\
\ldots.. & \ldots.. & .. & \ldots & .. \\
\gamma_{n1} & \gamma_{n2} & .. & \gamma_{n,n-1} & 1
\end{pmatrix}
$$

Facem următoarele notații:

$$\alpha_{ij} = < e_i, e_j > = < Ae_i, e_j >_{R^n} = a_{ij}$$

$$\beta_{ki} = < e_k, p_i >, i < k$$

$$\beta_{ii} = \| p_i \|^2 = < Ap_i, p_i >_{R^n}$$

Ținând seama de aceste notații , în formulele de mai sus obținem:

$$\gamma_{ki} = \frac{\beta_{ki}}{\beta_{ii}}, \quad \text{i<k;}$$

Dar având în vedere definiția lui β_{kj}, j<k ,şi formulele lui p_1, p_{k+1} avem:

$$\beta_{kj} = < e_k, p_j > = < e_k, e_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{\| p_i \|^2} < e_j, p_i > p_i > = < e_k, e_j > - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{\| p_i \|^2} < e_j, p_i >< e_k, p_i > =$$

Pen

$$= \alpha_{kj} - \sum_{i=1}^{j-1} \gamma_{ji} \beta_{ki} = \alpha_{kj} - \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{ji} \gamma_{ki} = \alpha_{kj} - \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{ji} \frac{\beta_{ki}}{\beta_{ii}}$$

tru β_{kk} avem:

$$\beta_{kk} = < p_k, p_k > = < e_k, e_k > - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\| p_i \|^2} < e_k, p_i >< e_k, p_i > = \alpha_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_{ki} \beta_{ki} = \alpha_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta^2{}_{ki}}{\beta_{ii}}$$

Elementele matricei Γ de mai sus pot fi determinate pe baza următoarelor relații de recurență:

$$\beta_{kj} = \alpha_{kj} - \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{ji} \frac{\beta_{ki}}{\beta_{ii}}, j < k$$

$$\beta_{kk} = \alpha_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\beta^2{}_{ki}}{\beta_{ii}},$$

$$\gamma_{kj} = \frac{\beta_{kj}}{\beta_{jj}}, j < k;$$

unde $\alpha_{kj} = a_{kj}$.

Chiar dacă au fost obținute separat, formulele pentru β_{kj}, j<k şi β_{kk} pot fi redate printr-o singură formulă pe baza relațiilor scrise anterior (primele două relații din cele trei de mai sus):

$$\beta_{kj} = \alpha_{kj} - \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{ji} \frac{\beta_{ki}}{\beta_{ii}}, \quad j \le k, \quad \alpha_{kj} = a_{kj}.$$

Prezentăm în continuare algoritmul care ne permite să calculăm elementele matricei Γ , pe baza raționamentului descris mai sus:

Pas 1. Inițializăm k şi n.

Pas 2. Dacă $k \geq n$, se execută pasul 8 (STOP) , altfel executăm pasul 3.

Pas 3. $k \leftarrow k+1$, $\beta_{kj} = \alpha_{k1} =< Ae_k, e_1 >, \gamma_{k1} = \dfrac{\beta_{k1}}{\beta_{11}}, j \leftarrow 1$

Pas 4. Dacă $j \geq k$, se trece la pasul 2, altfel trecem la pasul 5.

Pas 5. $j \leftarrow j+1$, $\beta_{kj} = \alpha_{kj} =< Ae_k, e_j >, i \leftarrow 0.$

Pas 6. Dacă $i \geq j-1$, $\gamma_{kj} = \dfrac{\beta_{kj}}{\beta_{jj}}$, trecem la pasul 4 , altfel la pasul 7.

Pas 7. $i \leftarrow i+1$, $\beta_{kj} \leftarrow \beta_{kj} - \beta_{ji}\gamma_{ki}$, trecem la pasul 6.

Pas 8. STOP.

Algoritmul prezentat poate fi modificat , astfel încât odată cu aflarea elementelor matricei Γ, să avem posibilitatea să determinăm şi vectorii A-conjugați $p_1, \ldots, p_n$.

Pas 1. Se inițializează k şi n.

Pas 2. Dacă $k \geq n$, executăm pasul 10, altfel trecem la pasul 3.

Pas 3. k$\leftarrow$k+1, $\beta_{k1} = \alpha_{k1} = < Ae_k, e_1 >, \gamma_{k1} = \dfrac{\beta_{k1}}{\beta_{11}}, j \leftarrow 1.$

Pas 4. Daca j$\geq$k , $p_k = e_k$, i$\leftarrow$0, trecem la pasul 8, altfel la pasul 5.

Pas 5. j$\leftarrow$j+1, $\beta_{kj} = \alpha_{kj} = < Ae_k, e_j >, i \leftarrow 0.$

Pas 6. Dacă i$\geq$j-1, $\gamma_{kj} = \dfrac{\beta_{kj}}{\beta_{jj}}$, executăm pasul 4, altfel trecem la pasul 7.

Pas 7. i$\leftarrow$i+1, $\beta_{kj} \leftarrow \beta_{kj} - \beta_{ji}, \gamma_{ki}$, trecem la pasul 6.

Pas 8. Dacă i$\geq$k-1, trecem la pasul 2, altfel trecem la pasul 9.

Pas 9. i$\leftarrow$i+1, $p_k = p_k - \gamma_{ki} p_i$, trecem la pasul 8.

Pas 10. STOP.

2.7. Exemple de utilizare a metodei variaționale în studiul unor probleme la limită pentru operatori diferențiali.

După cum se va vedea în demonstrarea faptului că operatorii diferențiali pe care îi vom considera satisfac, pe mulțimea funcțiilor admisibile problemelor la limită, ipotezele teoremei variaționale întărite, un rol important îl joacă anumite inegalități diferențiale. Ipoteza esențială în teorema variațională întărită este cea de pozitiv definire a operatorului.

Inegalități diferențiale remarcabile:

Teorema 1:(Inegalitatea lui Poincare):

Fie Ω un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ continuă.Pentru orice u$\in H^m(\Omega)$ avem:

$$\| u \|_{H^m}^2 \leq const\Big(\sum_{|i|=m} \int_\Omega | D^i u |^2 \; dx + \sum_{|i|<m} \Big| \int_\Omega D^i u dx \Big|^2 \Big)$$

Fie Ω un domeniu mărginit cu frontiera continuă. Pentru orice u$\in H^m(\Omega)$ este adevărată inegalitatea:

$$\| u \|_{H^m}^2 \leq const\Big(\int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega \sum_{|i|=m} | D^i u |^2 \; dx\Big)$$

Interesul pentru această inegalitate constă în faptul că se poate arăta că $H^m(\Omega)$ este spațiu hilbert în norma dată de expresia ce se găseşte în dreapta inegalității.

Teorema 2(A doua inegalitate a lui Friedrichs):

Fie Ω un domeniu marginit cu frontiera lipschitziană. Fie $\Gamma \subset \partial\Omega$ astfel încât $(\Gamma)\neq 0$. Pentru orice $u \in H^1(\Omega)$ avem:

$$\| u \|_{H_1}^{\ 2} \leq const(\int_{\Gamma} |u|^2 dS + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx)$$

Spațiile cât H^m/P.

Vom nota cu P_{m-1} mulțimea polinoamelor reale de grad mai mic sau egal cu m-1. Fie $P \subset P_{m-1}$ o submulțime liniară a lui P_{m-1}.Vom nota cu H^m/P spațiul cât al claselor $\bar{\bar{u}}$ de funcții din H^m definite astfel: $u,v \in \bar{\bar{u}} \Leftrightarrow u-v \in P$. Pe H^m/P norma se defineşte, după cum se ştie, astfel:

$$\| \bar{\bar{u}} \|_{H^m/P} = \inf_{u \in \bar{u}} \|u\|_m .$$

Spațiile H^m/P sunt, evident, spații Banach.

În cazul $P = P_{m-1}$ se pot enunța următoarele rezultate:

Teorema 3.

Fie Ω un domeniu mărginit cu frontiera continuă. Atunci:

a) Pentru orice $u \in \bar{\bar{u}}$ avem:

$$\| \bar{u} \|_{H^m/P_{m-1}} \leq const(\int_{\Omega} \sum_{|i|=m} | D^i u |^2 \ dx)^{\frac{1}{2}}$$

b) H^m / P_{m-1} este spațiu Hilbert cu norma generată de produsul scalar:

$$< \bar{u}, \bar{v} >_{H^m/P_{m-1}} = \int_{\Omega} \sum_{|i|=m} D^i u D^i v dx .$$

În continuare vom prezenta câteva exemple:

Exemplul 1 :

1. Se caută funcția $u \in C^2[0,1]$ care satisface:

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=f\text{ , x}\in(0,1)$$

şi condițiile la frontieră u(0)=u(1)=0, f fiind o funcție reală aparținând lui $L_2(0,1)$.

Fie $\Phi^{(2)}(0,1)=\{u\in C^{(2)}[0,1] \mid u(0)=u(1)=0\}$.

Ipotezele teoremei variaționale întărite sunt satisfacute în următorul cadru funcțional:

$$H= L_2(0,1),\text{ real, } D(A)= \Phi^{(2)}(0,1)$$

$$A=-\frac{d^2}{dx^2}:\Phi^{(2)}(0,1)\subset L_2(0,1)\to L_2(0,1)$$

Vor trebui arătate următoarele: $\Phi^{(2)}(0,1)$ este un subspațiu dens al lui $L_2(0,1)$, $A=-\frac{d^2}{dx^2}:\Phi^{(2)}(0,1)\to L_2(0,1)$ este un operator liniar, simetric şi pozitiv definit pe $\Phi^{(2)}(0,1)$. Densitatea lui $\Phi^{(2)}(0,1)$ în $L_2(0,1)$ rezultă din faptul că $\Phi^{(2)}(0,1)\supset C_0^\infty(0,1)$ iar $C_0^\infty(0,1)$ este densa în $L_2(0,1)$.

Simetria operatorului $A=-\frac{d^2}{dx^2}$ rezultă astfel: pentru orice u,v $\in\Phi^{(2)}(0,1)$, avem:

$$<Au,v>_{L_2(0,1)}=<-\frac{d^2u}{dx^2},v>_{L_2(0,1)}=\int_0^1(-\frac{d^2u}{dx^2})vdx=\int_0^1[-\frac{d}{dx}(\frac{du}{dx}v)+\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}]dx=$$

$=-\frac{du}{dx}v|_1^0+\int_0^1\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx$, de unde ținând seama că v$\in\Phi^{(2)}(0,1)$, deci v(0)=v(1)=0, rezultă: $\forall$ u,v$\in\Phi^{(2)}(0,1)$:

$$<Au,v>_{L_2(0,1)}=\int_0^1\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx=<Au,v>_{L_2(0,1)}.$$

Să arătăm că $A=-\frac{d^2}{dx^2}$ este pozitiv definit pe $\Phi^{(2)}(0,1)$. Făcând în relația de mai sus v=u, obținem:

$\forall$ u$\in\Phi^{(2)}(0,1)$, $<Au,u>_{L_2(0,1)}=\int_0^1 u'^2dx$ **(*)** de unde rezultă că $A=-\frac{d^2}{dx^2}$ este strict pozitiv pe $\Phi^{(2)}(0,1)$. Într-adevăr este evident că $<Au,u>_{L_2(0,1)}\geq 0$ şi că din presupunerea $<Au,u>_{L_2(0,1)}=0$ rezultă u=const=0(deoarece u(0)=u(1)=0).

Vom arăta, mai mult, că A este pozitiv definit pe $\Phi^{(2)}(0,1)$.Într-adevăr, avem:

$$\int_0^1 u'^2(x)dx\geq 2\|u\|^2_{L^2{}_2(0,1)}\text{ , }\forall\text{ u}\in\Phi^{(2)}(0,1).\quad \textbf{(*)}$$

Din ultima egalitate şi ultima inegalitate rezultă:

$$\forall\, u \in \Phi^{(2)}(0,1)\ \langle Au,u\rangle_{L_2(0,1)} \geq 2\,\|u\|^2_{L_2(0,1)}$$

Ipotezele teoremei variaţionale întărite fiind satisfăcute, avem următoarea teoremă:

Teorema 4:

Dacă ecuaţia $-\dfrac{d^2u}{dx^2}=f$, $x\in(0,1)$ posedă o soluţie în $\Phi^{(2)}(0,1)$, atunci această soluţie este unică şi realizează pe $\Phi^{(2)}(0,1)$ minimul următoarei funcţionale:

$$u\in\Phi^{(2)}(0,1)\,,\quad F(u)=\int_0^1 (u'^2(x)-2fu(x))dx$$

Reciproc, dacă există $u_0\in\Phi^{(2)}(0,1)$ care minimizează funcţionala de mai sus, atunci u_0 este soluţie a ecuaţiei $-\dfrac{d^2u}{dx^2}=f$, $x\in(0,1)$.

Funcţionala $F(u)=\int_0^1 (u'^2(x)-2fu(x))dx$ este mărginită inferior şi strict convexă. Orice şir minimizant al funcţionalei converge în $L_2(0,1)$ (existenţa soluţiei generalizate în sens Sobolev pentru problema $-\dfrac{d^2u}{dx^2}=f$, $x\in(0,1)$, u(0)=u(1)=0.

Toate şirurile minimizante ale funcţionalei $F(u)=\int_0^1 (u'^2(x)-2fu(x))dx$, au aceeaşi limită în $L_2(0,1)$ (unicitatea soluţiei în sens Sobolev).

În scopul de a aplica metoda Ritz pentru construirea unui şir minimizant pentru funcţionala F vom caracteriza, mai întâi, spaţiul H_A (spaţiul energetic al operatorului A), completatul lui $\Phi^{(2)}(0,1)$ în norma generată de produsul scalar:

$$u,v\in\Phi^{(2)}(0,1)\,,\ \langle u,v\rangle_{H_A}=\langle Au,v\rangle_{L_2(0,1)}=\int_0^1 u'(x)v'(x)dx=\langle u',v'\rangle_{L_2(0,1)}.$$

Norma pe care acest produs scalar o generează pe $\Phi^{(2)}(0,1)$ este:

$$u\in\Phi^{(2)}(0,1),\ \|u\|^2_{H_A}=\int_0^1 u'^2(x)dx=\|u'\|^2_{L_2(0,1)}$$

Deoarece H= $L_2(0,1)$ este separabil, rezultă că H_A este de asemenea separabil. Mai mult, H_A se identifică cu un subspațiu închis al lui H^1,deoarece norma $\| \|_{H_A}$ definită de relația de mai sus ($u \in \Phi^{(2)}(0,1)$, $\|u\|^2_{H_A} = \int_0^1 u'^2(x)dx = \|u'\|^2_{L_2(0,1)}$) este echivalentă pe $\Phi^{(2)}(0,1)$ cu norma $\|u\|_{H^1}$. Într-adevăr, avem $\forall\, u \in \Phi^{(2)}(0,1)$:

$$\|u\|^2_{H^1} = \int_0^1 u^2(x)dx + \int_0^1 u'^2(x)dx \geq \|u\|^2_{H_A}$$

Pe de altă parte, ținând seama de relația: $\int_0^1 u'^2(x)dx \geq 2\|u\|_{L_2(0,1)}{}^2$, $\forall\, u \in \Phi^{(2)}(0,1)$, rezultă: $\|u\|^2_{H^1} \leq \frac{3}{2}\|u\|^2_{H_A}$, astfel că, în definitiv,

$$\forall\ u \in \Phi^{(2)}(0,1),\ \|u\|^2_{H_A} \leq \|u\|^2_{H_1} \leq \frac{3}{2}\|u\|^2_{H_A}.$$

Propoziția 1:

Sistemul $\varphi_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|_A} = \frac{\sqrt{2}\sin n\pi x}{n\pi}, n \in N$ este ortonormal şi total în H_A.

Dispunând de un sistem ortonormal şi total în H_A, putem aplica procedeul Ritz de construire a unui şir minimizant pentru $\tilde{F}$ pe H_A. Am văzut că un asemenea şir este definit de:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} < f, \varphi(\varphi_k) >_{H\varphi_k}$$

şi că: $u_n \xrightarrow{\|\|_{H_A}} u_0, \varphi(u_n) \xrightarrow{\|\|_H} \varphi(u_0), n \to \infty$, unde φ este injecția liniară şi continuă de scufundare a lui H_A în H , u_0 este punctul de minim al funcționalei extinse $\tilde{F}$ (de la D(A) la H_A), iar $\varphi(u_0)$ este soluția generalizată în sens Sobolev a problemei la limită $-\frac{d^2u}{dx^2} = f$, $x \in (0,1)$, u(0)=u(1)=0.

Deoarece $D(A) \in \varphi_n$ si $\varphi|_{D(A)} = I|_{D(A)}$, rezultă:

$u_n \in D(A)$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} < f, \varphi(\varphi_k) >_{H\varphi_k} \xrightarrow{\|\|_{H_A}} u_0 \to \varphi(u_0) \xrightarrow{\|\|_H} u_n$, în acest caz u_n fiind un şir minimizant chiar pentru F pe D(A).

Rămâne aşadar să calculăm :

$$a_k =< f,\varphi_k >_{L_2(0,1)} = \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sqrt{2}\sin k\pi x f(x)dx.$$

Se ştie însă că sistemul ($\sqrt{2}\sin k\pi x$) este ortonormal şi total în $L_2(0,1)$.

Cum $f \in L_2(0,1)$, rezultă că:

$$f_k = \int_0^1 \sqrt{2}\sin k\pi x f(x)dx$$

reprezintă coeficienții Fourier ai lui f în raport cu sistemul ortonormal şi total în $L_2(0,1)$, ($\sqrt{2}\sin k\pi x$). În consecință:

$$u_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k}{k^2}\sin k\pi x, \qquad u_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{k^2}\sin k\pi x$$

Pentru valoarea de minim a lui $\tilde{F}$ pe H_A (care coincide cu marginea inferioara a lui F pe D(A)) avem:

$$\min_{u\in H_A}\tilde{F}(u) = \inf_{u\in D(A)} F(u) = -\| u_0 \|^2_{H_A} = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\,2} = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k^{\,2}}{k^2}.$$

Exemplul 2:

Se caută funcția $u \in C^{(2m)}[0,1]$ care satisface:

$$Au = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k}[p_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}] = f \in L_2(0,1) \qquad \textbf{1.}$$

cu condițiile la capete $\quad u(0)= u'(0)=\ldots\ldots =u^{(m-1)}(0)=0$, **2.**

$\quad u(1)=u'(1)=\ldots\ldots\ldots=u^{(m-1)}(1)=0.$

Asupra coeficienților p_k , k=0,…..,m facem următoarele ipoteze:

a) $p_k(x)\geq 0 \ \forall x\in[0,1]$; există k_0 astfel încât $p_{k_0}(x) \geq p_0 >0 \ \forall x\in[0,1]$

b) $p_k \in C^k[0,1]$, k=0,1,…..,m.

Teorema 5:

Ipotezele teoremei variaționale întărite sunt satisfăcute în următorul cadru funcțional:

$H= L_2(0,1)$.

$D(A)=\{u\in C^{(2m)}[0,1],\ u(0)=u'(0)=\ldots=u^{(m-1)}(0)=0,\ u(1)=u'(1)=\ldots=u^{(m-1)}(1)=0\}$

Au= $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k}[p_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}] : D(A) \to L_2(0,1)$.

Demonstrație:

Pentru simetria operatorului A pe D(A) este suficient să observăm că, integrând prin părți şi ținând seama de condițiile la limită de mai sus pe care le satisfac funcțiile din D(A) , obținem , $\forall$ u,v$\in$D(A) :

$$<Au,v>_{L_2(0,1)} = \sum_{k=0}^{m}\int_0^1 p_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}\frac{d^k v}{dx^k}dx = <Av,u>_{L_2(0,1)}$$

Pentru pozitiv definirea operatorului A pe D(A) este suficient să observăm că, făcând în relația de mai sus v=u, obținem:

$$<Au,u>_{L_2(0,1)} = \sum_{k=0}^{m}\int_0^1 p_k(x)(\frac{d^k u}{dx^k})^2 dx \geq p_0\int_0^1 (\frac{d^{k_0} u}{dx^{k_0}})^2 = p_0 \| u^{k_0} \|^2_{L_2(0,1)}$$

Consecință a satisfacerii ipotezelor teoremei variaționale întărite avem o teoremă variațională pentru problema **1., 2.,** funcționala ataşată fiind:

$$u \in D(A), F(u) = \int_0^1 [\sum_{k=0}^{m} p_k(x)(\frac{d^k u}{dx^k})^2 - 2f(x)u(x)]dx$$

Un caz particular ar problemei de mai sus este problema următoare:

$$Aw = \frac{d^2}{dx^2}[EI(x)\frac{d^2 w}{dx^2}] + Kw = q(x) \text{ , x} \in (0,l) \text{ ,}$$

w(0)=w(l)=0, w'(0)=w'(l)=0

Această problemă apare în studiul încovoierii barelor cu capetele încastrate , iar mărimile care intervin au următoarea semnificație mecanică:

w- incovoierea corespunzătoare secțiunii de abscisă x;

I(x)-momentul de inerție al secțiunii de abscisă x , constant dacă bara este de secțiune constantă ; deoarece se admite că nici o secțiune a barei nu se reduce la un punct, avem I(x)>0 , $\forall$ x$\in$[0,1];

E-modulul de elasticitate a lui Young;

K-coeficientul de reacțiune al suportului elastic;

q(x)-intensitatea încărcării normale;

Ținând seama de rezultatele obținute pentru cazul general , găsirea funcției $u \in C^{(4)}[0,l]$ care satisface problema de mai sus (cazul particular) este echivalentă cu găsirea punctului de minim al funcționalei :

$$F(u) = \int_0^l [EI(x)w'^2 + Kw^2 - 2q(x)]dx$$

pe mulțimea de funcții $D(A)=\{w \in C^{(4)}[0,l],\ w(0)=w(l)=0,\ w'(0)=w'(l)=0\}$

Exemplul 3:

Problema Dirichlet omogena

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, deschis, mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^1. Se caută $u \in C^2(\overline{\Omega})$ astfel încât :

$(P)\ \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{în } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$, unde $f \in L^2(\Omega)$ este o funcție dată.

Considerăm cazul real, $\Lambda = \mathbf{R}$. Ipotezele teoremei variaționale întărite sunt satisfăcute în următorul cadrul funcțional:

$$H = L^2(\Omega)$$

$$D(A) = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$A = -\Delta : D(A) \to H$$

Într-adevăr, $L^2(\Omega)$ este spațiu Hilbert, $\langle u,v\rangle_H = \langle u,v\rangle_{L^2\Omega} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$.

Cum $C_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, dens în $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ şi $C_c^\infty(\Omega) \subset D(A) \subset L^2(\Omega)$ rezultă că D(A) este dens în H în $\|\cdot\|_H$.

Din exemplul **1**(capitolul 1 paragraful 1.5) avem că A este simetric şi pozitiv definit. Cum evident A este liniar rezultă că sunt satisfăcute ipotezele teoremei variaționale întărite în acest cadru funcțional.

Conform teoremei variaționale fundamentale rezultă că, dacă problema (P) are o soluție atunci ea este unică şi minimizează pe D(A) următoarea funcțională $F:D(A) \to \mathbf{R}$,

$$F(u) = \langle Au,u\rangle_H - 2\mathrm{re}\langle u,f\rangle = \langle -\Delta u,u\rangle_{L^2(\Omega)} - 2\langle u,f\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 - 2fu\right]dx .$$

Reciproc, dacă există $u_0 \in D(A)$ care minimizează funcționala F atunci u_0 este soluție a problemei (P) şi după prima parte a teoremei este unica soluție.

Funcţionala F este mărginită inferior şi uniform convexă pe D(A).

Orice şir minimizant al funcţionalei F are limită în $L^2(\Omega)$ (existenţa soluţiei generalizate pentru problema (P)) .Toate şirurile minimizante ale funcţionalei F au aceeaşi limită în $L^2(\Omega)$ (unicitatea soluţiei generalizate).

Capitolul 3. Metoda variaţională în studiul operatorilor neliniari cu diferenţială simetrică şi pozitiv definită.

3.1. Teorema variaţională a lui Langenbach

Fie H un spaţiu Hilbert real, $D(P) \subset H$ un subspaţiu dens, $f\in H$, $P: D(P) \to H$ un operator, în general neliniar, dar derivabil în sens Gateaux pe D(P) (deci cu variaţie de ordinul întâi pe D(P)).

Dacă $u,h \in D(P)$ atunci:

$DP(u)(h) = \lim_{t\to 0} \frac{P(u+th)-P(u)}{t} \in H$, este derivata în sens Gateaux (sau variaţia de ordinul întâi) în u după direcţia h.

Teorema 1.

Fie $P:D(P)\to H$, $D(P) \subset H$, subspaţiu dens, $f\in H$, P derivabil în sens Gateaux pe D(P) astfel încât :

(H_1) $(\forall)u\in D(P)$, operatorul $(DP)(u):H\to H$ este liniar;

(H_2) $(\forall)u_0,u_1,u_2,h_1,h_2 \in D(P)$, aplicaţia:

$[0,1] \times [0,1] \ni (t_1,t_2) \to \langle (DP)(u_0 +t_1u_1 + t_2u_2)(h_1),h_2\rangle \in \mathbf{R}$, este continuă;

(H_3) $\langle (DP)(u)(h_1),h_2\rangle = \langle (DP)(u)(h_2), h_1\rangle$, $(\forall)u,h_1,h_2 \in D(P)$;

(H_4) $\langle (DP)(u)(h),h\rangle > 0$, $(\forall)u,h \in D(P)$, $h \neq \theta_H$.

Atunci :

1) Ecuaţia Pu =f are cel mult o soluţie;

2) $u_0\in D(P)$ este soluţie a ecuaţiei Pu=f dacă şi numai dacă u_0 minimizează pe D(P) funcţionala $F: D(P)\to \mathbf{R}$,$F(u) = \int_0^1 \langle P(tu),u\rangle dt - \langle f, u\rangle$.

Demonstrație:

1) Presupunem prin reducere la absurd că există $u_1,u_2 \in D(P), u_1 \neq u_2$ astfel încât $Pu_1 = Pu_2 = f$.

Considerăm funcția $\varphi:[0,1] \to \mathbf{R}$, $\varphi(t) = \langle P(tu_1+(1-t)u_2), u_1 - u_2\rangle =$

$= \langle P(u_2+t(u_1 - u_2)), u_1 - u_2\rangle$.

Pentru $\lambda \neq 0$ avem:

$\dfrac{\varphi(t+\lambda)-\varphi(t)}{\lambda} = \left\langle \dfrac{P(u_2+t(u_1-u_2)+\lambda(u_1-u_2))-P(u_2+t(u_1-u_2))}{\lambda}, u_1 - u_2 \right\rangle$, de unde, prin trecere la limită cu $\lambda \to 0$ rezultă că φ este derivabilă pe [0,1] şi

$$\varphi'(t) = \langle DP(u_2+t(u_1 - u_2))(u_1 - u_2), u_1 - u_2\rangle > 0, \qquad \textbf{(1)}$$

din ipoteza (H_4), contradicție.

2)"⇒". Presupunem că $Pu_0 = f$ şi arătăm că $F(u_0) \leq F(u)$, $(\forall) u \in D(P)$. Considerăm funcționala ρ: $D(P) \to \mathbf{R}$, $\rho(u) = \int_0^1 \langle P(tu),u\rangle dt$, numită şi potențialul normalizat al lui P.

Dacă $u,h \in D(P)$, atunci :

$$\rho(u+h)-\rho(u) = \int_0^1 \langle P(tu+th), u+h\rangle\, dt - \int_0^1 \langle P(tu), u\rangle dt =$$

$$= \int_0^1 \langle P(tu+th)-P(tu),u\rangle dt + \int_0^1 \langle P(tu+th),h\rangle dt.$$

Fie $A = \int_0^1 \langle P(tu+th)- P(tu),u\rangle dt$ şi φ: $[0,1] \to \mathbf{R}$, $\varphi(s) = \langle P(tu+sh),u\rangle$. Atunci φ este derivabilă pe [0,1] şi $\varphi'(s) = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{\varphi(s+\lambda)-\varphi(s)}{\lambda} = = \lim\limits_{\lambda\to 0} \left\langle \dfrac{P(tu+sh+\lambda h)-P(tu+sh)}{\lambda}, u \right\rangle$

$= \langle (DP)(tu+sh)(h), u\rangle$

Folosind ipoteza (H_3) obținem:

$$\varphi'(s) = \langle (DP)(tu+sh)(u), h\rangle = \left\langle \lim_{\lambda\to 0} \frac{P(tu+sh+\lambda u)-P(tu+sh)}{\lambda}, h \right\rangle =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\langle P(tu+sh+\lambda u),h\rangle - \langle P(tu+sh),h\rangle}{\lambda} = \frac{d}{dt}\langle P(tu+sh),h\rangle.$$

Folosind şi ipoteza (H_2) vom avea:

$$A = \int_0^1 \langle P(tu+sh)-P(tu),u\rangle dt = \int_0^1 [\varphi(t) - \varphi(0)]dt = \int_0^1 \left[\int_0^t \varphi'(s)ds\right] dt =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^t \frac{d}{dt}\langle P(tu+sh),h\rangle ds\right] dt = \int_0^1 \left[\int_s^1 \frac{d}{dt}\langle P(tu+sh),h\rangle dt\right] ds =$$

$= \int_0^1 [<P(u+sh),h> - <P(su+sh),h>]\, ds.$

În final avem:

$$\rho(u+h) - \rho(u) = \int_0^1 < P(u+th), h>dt \qquad (\mathbf{2})$$

şi atunci $F(u) - F(u_0) = \rho(u) - <f, u> - \rho(u_0) + <f, u_0> = \rho(u_0+u - u_0) - \rho(u_0) -$

$- <f, u-u_0> = \int_0^1 < P(u_0+t(u-u_0)),u-u_0>dt - <f, u-u_0> = \int_0^1 < P(u_0+t(u-u_0)),u-u_0>dt -$

$- <Pu_0, u-u_0> = \int_0^1 < P(u_0+t(u-u_0)) - P(u_0), t(u-u_0)> \frac{1}{t} dt$ şi folosind (**1**) vom avea :

$$F(u) - F(u_0) = \int_0^1 [\int_0^1 < (DP)(u_0 + st(u - u_0))(u-u_0), u - u_0>tds]\, dt \qquad (\mathbf{3})$$

Folosind ipoteza (H_4) rezultă :

$F(u) - F(u_0) > 0$, $(\forall)u \in D(P)$, $u \neq u_0$, deci u_0 este unicul punct de minim a lui F pe D(P).

"$\Leftarrow$" Fie $u_0 \in D(P)$ astfel încât $F(u_0) \leq F(u)$, $(\forall)u \in D(P)$. Fie $h \in D(P)$ şi $\varphi : R \to R$, $\varphi(t) = F(u_0 + th)$.

Atunci $\varphi(t) \geq \varphi(0)$, $(\forall)t \in \mathbf{R}$, deci $t = 0$ este punct de minim pentru φ. Vom arăta că φ este derivabilă în $t = 0$ şi din teorema lui Fermat va rezulta $\varphi'(0) = 0$.

Într-adevăr, folosind (**2**) vom avea:

$$\varphi'(0) = \lim_{s\to 0} \frac{\varphi(s) - \varphi(0)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}[F(u_0 + sh) - F(u_0)] =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}[\rho(u_0 + sh) - \rho(u_0) - <f,sh>] = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}[\int_0^1 < P(u_0 + tsh), sh>dt - <f,sh>] = <Pu_0 - f,h>,$$ deci

$$<Pu_0 - f, h> = 0, (\forall)\, h \in H, \text{ de unde } Pu_0 = f.$$

3.2. Teorema variațională întărită a lui Langenbach

Teorema 1

Dacă în teorema variaționala a lui Langenbach ipoteza (H_4) este înlocuită cu ipoteza (evident mai tare):

(H_4') există $\gamma^2 > 0$ astfel încât:

$<(DP)(u)(h),h> \ \geq \gamma^2\|h\|^2$,$(\forall)$ $u,h \in D(P)$, atunci în plus față de concluziile teoremei variaționale a lui Langenbach avem:

1) F este mărginită inferior pe D(P);

2) F este uniform convexă pe D(P); mai precis avem:

$$(1-\lambda)\, F(u_1) + \lambda F(u_2) - F((1-\lambda)u_1 + \lambda u_2) \geq \lambda\,(1-\lambda)\, \frac{\gamma^2}{2} \|u_1 - u_2\|^2$$

$(\forall) u_1,u_2 \in D(P)$, $\lambda \in [0,1]$;

3)Orice şir minimizant pentru F pe D(P) are limită în H;

4) Toate şirurile minimizante ale lui F au aceeaşi limită în H.

Demonstrație:

1) Pentru $(\forall)$ $u \in D(P)$ avem:

$$F(u) = \int_0^1 < P(tu), u > dt - <f, u> = \int_0^1 < P(tu) - P\theta_H ,u>dt + < P\theta_H ,u> - <f, u> =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t} < P(tu) - P\theta_H ,tu>dt - < f - P\theta_H,u> = \int_0^1 \frac{1}{t} \left[\int_0^1 < (DP)(stu)(tu),tu> ds\right] dt -$$

$$- <f - P\theta_H,u> = \int_0^1 t \left[\int_0^1 < (DP)(stu)(u),u> ds\right] dt - <f - P\theta_H,u> \geq$$

$$\geq \int_0^1 t\gamma^2 \|u\|^2 dt - \|f - P\theta_H\|\,\|u\| = \frac{\gamma^2}{2} \|u\|^2 - \|f - P\theta_H\|\,\|u\| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\gamma\, \|u\| - \frac{1}{\gamma} \|f - P\theta_H\|\right)^2 - \frac{1}{2\gamma^2} \|f - P\theta_H\|^2 \geq - \frac{1}{2\gamma^2} \|f - P\theta_H\|^2,$$ deci F este mărginită inferior pe D(P).

2) Din relatia (**1**) din teorema anterioara, pentru $(\forall)$ $u_1, u_2 \in D(P)$ avem:

$$<Pu_1 - Pu_2, u_1 - u_2> = \int_0^1 < (DP)(tu_1 +(1-t)u_2)(u_1 - u_2), u_1 - u_2> dt \geq \gamma^2 \|u_1 - u_2\|^2.$$

Pe de altă parte pentru orice $u_1, u_2 \in D(P)$, $u_1 \neq u_2$ şi orice $\lambda \in (0,1)$ avem :

$$\Delta_{\lambda,u_1,u_2} F = (1-\lambda) F(u_1) + \lambda F(u_2) - F((1-\lambda)u_1 + \lambda u_2) =$$

$$= (1-\lambda)(\rho(u_1) - <f, u_1>) + \lambda(\rho(u_2) - <f, u_2>) - \rho((1-\lambda)u_1 + \lambda u_2) + <f, (1-\lambda)u_1 + \lambda u_2>$$

$$= (1-\lambda)\rho(u_1) + \lambda\, \rho(u_2) - \rho((1-\lambda) u_1 + \lambda u_2) = \lambda\,[\rho(u_2) - \rho(u_1)] - [\rho(u_1 + \lambda(u_2 - u_1)) - \rho(u_1)].$$

Folosind formula (**2**) din teorema anterioara obținem:

$$\Delta_{\lambda,u_1,u_2} F = \lambda \int_0^1 < P(u_1+t(u_2 - u_1)),u_2 - u_1 >dt - \int_0^1 < P(u_1+t\lambda (u_2 - u_1)), \lambda(u_2 - u_1)>dt$$

$$= \lambda \int_0^1 < P(u_1+t(u_2 - u_1)) - P(u_1+t \lambda (u_2 - u_1)), u_2 - u_1> dt =$$

$$= \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 \frac{1}{t} < P(u_1+t(u_2 - u_1)) - P(u_1+t\,\lambda\,(u_2 - u_1)),\ t(1-\lambda)(u_2 - u_1)> dt \geq$$

$$\geq \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 \frac{1}{t}\,\gamma^2 t^2(1-\lambda)^2\,\|u_2 - u_1\|^2 dt = \lambda(1-\lambda)\frac{\gamma^2}{2}\,\|u_2 - u_1\|^2 .$$

Cum pentru $\lambda \in \{0,1\}$ sau $u_1 = u_2$, inegalitatea cerută este evidentă, demonstrația este încheiată.

În particular, cum F este uniform convexă rezultă că este convexă.

3) Pentru $u_1, u_2 \in D(P)$, $\lambda \in (0,1)$, din 2) avem:

$$(1-\lambda)\,F(u_1) + \lambda\,F(u_2) - F((1-\lambda)u_1 + \lambda u_2) \geq \lambda(1-\lambda)\frac{\gamma^2}{2}\,\|u_2 - u_1\|^2 \qquad \textbf{(4)}$$

Fie $(u_n) \subset D(P)$ un şir minimizant pentru F : $F(u_n) \to d = \inf\limits_{D(P)} F$

Înlocuind în (**4**) pe u_1 cu u_n şi pe u_2 cu u_m vom avea :

$$\lambda(1-\lambda)\frac{\gamma^2}{2}\,\|u_m - u_n\|^2 \leq (1-\lambda)\,F(u_n) + \lambda\,F(u_m) - F((1-\lambda)u_n + \lambda u_m) \leq$$
$$\leq (1-\lambda)\,F(u_n) + \lambda\,F(u_m) - d = (1-\lambda)\,[F(u_n) - d] + \lambda\,[F(u_m) - d].$$

Trecând la limită cu $m,n\to\infty$ şi ținând cont că $F(u_n)\to d$, pentru $n\to\infty$, obținem $\|u_m - u_n\|\to$ d, pentru $m,n\to\infty$, deci (u_n) este şir Cauchy în H şi atunci el este convergent.

4) Fie (u_n), $(v_n) \subset D(P)$ două şiruri minimizante pentru F pe D(P). Folosind (**4**) vom avea:

$$\lambda(1-\lambda)\frac{\gamma^2}{2}\,\|u_n - v_n\|^2 \leq (1-\lambda)[\,F(v_n) - d] + \lambda[\,F(u_n) - d]$$

Cum $F(u_n)\to d$, $F(v_n) \to d$, pentru $n\to\infty$, obținem $\|u_n - v_n\|\to 0$, pentru $n\to\infty$ şi cum (u_n) şi (v_n) sunt convergente în H rezultă că au aceeaşi limită în H.

3.3. Legătura dintre soluția generalizată şi soluția clasică a ecuației Pu=f

Definiția 1

Se numeşte soluție în sens Sobolev (sau generalizat) a ecuației Pu = f limita în H a oricărui şir minimizant al funcționalei F .

În legătură cu teoremele anterioare (teorema variațională a lui Langenbach şi variațională întărită) facem următoarea observație:

Observație:

În timp ce teorema variațională a lui Langenbach furniza unicitatea soluției clasice pentru problema Pu=f, teorema variațională întărită a lui Langenbach furnizează, în plus, existența şi unicitatea soluției generalizate pentru aceeaşi problemă.

Legătura dintre soluția generalizată şi soluția clasică a ecuației Pu=f este dată de următoarea teoremă:

Teorema 1:

1) Soluția în sens clasic este soluție în sens generalizat;

2) Dacă soluția generalizată $u_s \in D(P)$ atunci ea este soluție clasică

Demonstrație:

1) Fie u_0 soluție clasică a ecuației $Pu = f$, deci $u_0 \in D(P)$ şi $Pu_0 = f$.

Din teorema variațională a lui Langenbach avem că $F(u_0) = \min\limits_{D(P)} F = \inf\limits_{D(P)} F$.

Fie $u_n \subset D(P)$, $u_n = u_0$, $(\forall) n \geq 1$. Atunci (u_n) este şir minimizant pentru F şi cum $u_n \to u_0$, pentru $n \to \infty$ rezultă că u_0 este soluție în sens generalizat.

2) Fie $u_s \in D(P)$ soluție generalizată pentru F ; atunci există un şir $(u_n) \subset D(P)$ astfel încât $F(u_n) \to d = \inf\limits_{D(P)} F$ şi $u_n \to u_s$, pentru $n \to \infty$.

Dacă $u,v \in D(P)$, folosind relatia (**2**) din capitolul 3 vom avea:

$$F(u) - F(v) = \rho(u) - \langle f,u\rangle - \rho(v) + \langle f, v\rangle = \rho(v+u-v) - \rho(v) - \langle f, u - v\rangle =$$

$$= \int_0^1 \langle P(v+t(u-v)), u - v\rangle\, dt - \langle f, u - v\rangle =$$

$$= \int_0^1 \langle P(v+t(u-v)) - P(v), u - v\rangle\, dt - \langle f - Pv, u - v\rangle =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 \langle (DP)(v+st(u-v))(u-v), u - v\rangle\, t\, ds \right] dt - \langle f - Pv, u - v\rangle \geq$$

$$\geq \frac{\gamma^2}{2} \|u - v\|^2 - \|f - Pv\|\, \|u - v\|.$$

Pentru $u = u_n$ şi $v = u_s$ obținem:

$$F(u_n) - F(u_s) \geq \frac{\gamma^2}{2} \|u_n - u_s\|^2 - \|f - Pu_s\|\, \|u_n - u_s\|.$$

Trecând la limită cu $n \to \infty$ obținem:

d - F (u_s) ≥ 0, adică d ≥ F (u_s) şi cum F (u_s) ≥ d va rezulta F (u_s) = d.

Rezultă că u_s este punct de minim pentru F pe D(P) şi conform teoremei variationale a lui Langenbach rezultă că u_s este soluție clasică.

Remarcă:

Dacă P este liniar atunci teorema variațională a lui Langenbach, variațională fundamentală şi teorema anterioară se reduc la teoremele corespunzătoare de la capitolul 2 cazul operatorilor liniari şi pozitivi definiți.

3.4. Soluții slabe

Considerăm X spațiu Banach refelxiv, real, separabil şi X^* dualul său.

Definiția 1:

Spunem că operatorul $T:D(T)\subset X\to X^*$ este demicontinuu dacă transformă şirurile convergente în normă în şiruri slab convergente: $\forall(u_n)\subset D(T), u_n \xrightarrow{\|\|} u \Rightarrow Tu_n \xrightarrow{slab} Tu.$

b) Fie $D\subset X$ un domeniu mărginit de frontieră S. Spunem că operatorul $T:D\to X^*$ satisface condiția anterioară relativ la S dacă:

$$\forall(u_n)\subset S, u_n \xrightarrow{slab} u_0,\ \text{din } \lim_n < Tu_n, u_n - u_0 > \le 0 \Rightarrow u_n \xrightarrow{\|\|} u_0$$

c) Fie $(v_i)_{i\in N}$, un sistem numărabil , complet în X, adică astfel încât:

$$\overline{\bigcup_{n\ge1} F_n} = X\ ,$$

unde F_n =Sp[v_1,…..v_n].

Se numeşte aproximantă Galerkin de ordinul n a soluției ecuației Tu=0 elementul $u_n \in F_n$ care satisface:

$$< Tu_n, v_i >= 0,\ \text{i=1,……,n.}$$

Existența soluțiilor slabe şi convergența aproximantelor Galerkin sunt consecințe ale următoarelor două teoreme generale:

Teorema 1:

Fie $D\subset X$ un domeniu mărginit, de frontieră S şi fie $T:D\to X^*$ un operator mărginit, demicontinuu şi satisfăcând condiția a) relativ la S. Mai presupunem că $0\in D$ şi că: $<Tu,u>\geq 0$, $\forall$ $u\in S$.

Atunci ecuația Tu=0 are cel puțin o soluție în $\overline{D}$.

Teorema 2:

Fie $D\subset X$ un domeniu mărginit, de frontieră S şi fie T: $\overline{D}\to X^*$ un operator mărginit , demicontinuu şi satisfăcând condiția a) relativ la D. Presupunem că în domeniul D câmpul Tu are un singur punct critic ($\exists$ $u_0\in D$, unic, astfel încât $T u_0=0$) de index nul.

Atunci:

1) Aproximantele Galerkin ale soluției ecuației Tu=0 există pentru orice n care depăşeşte un anume n_0.

2) Când $n\to\infty$, şirul aproximantelor Galerkin converge (în normă) la soluția ecuației Tu=0.

3.5. Proprietăți de regularitate pentru soluția generalizată

În acest paragraf vom stabili unele proprietați de regularitate pentru soluția generalizată folosind metoda spațiilor energetice.

Presupunem că toate ipotezele teoremei variaționale întărite a lui Langenbach sunt îndeplinite şi în plus avem:

(H_5) Există $\bar{u}\in D(P)$ şi o constantă $\bar{\gamma}^2>0$ astfel încât:

$$<(DP)(u)(h),h>\geq \bar{\gamma}^2<(DP)(\bar{u})(h),h>,\ (\forall)u,h\in D(P).$$

Să observăm că, din (H_4') avem:

$\bar{\gamma}^2<(DP)(\bar{u})(h),h>\geq \bar{\gamma}^2\gamma^2\ ||h||^2$, $(\forall)h\in D(P)$.Introducem pe D(P) un nou produs scalar :

$$<u,v>_0=<(DP)(\bar{u})(u),v>_H,\ (\forall)u,v\in D(P),\text{ cu norma asociată:}$$

$$||u||_0^2=<(DP)(\bar{u})(u),u>_H\geq\gamma^2\ ||u||^2_H,\ (\forall)\ u\in D(P).$$

Fie H_0 spațiul energetic al operatorului (DP) $(\bar{u})$(deci al lui P),$H_0=\overline{D(P)}^{\|\cdot\|_0}$.

Dacă $u\in H_0$, există un şir $(u_n)\subset D(P)$ astfel încât $u_n\xrightarrow{\|\cdot\|_0}u$, sau echivalent :

$$<(DP)(\bar{u})(u_n - u), u_n - u> \to 0.$$

Observația 1

Spațiul energetic H_0 nu depinde de $\bar{u}$ şi constanta γ, ci numai de operatorul P.

Într-adevăr, fie $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2 \in D(P)$, $\bar{\gamma}_1^2 > 0$, $\bar{\gamma}_2^2 > 0$ astfel încât :

$$<(DP)(\bar{u}_i)(h),h> \geq \bar{\gamma}_i^2 <(DP)(\bar{u}_i)(h),h>, (\forall)\ u,h \in D(P),\ i = \overline{1,2}.$$

Luând $u = \bar{u}_2$ şi $i = 1$ obținem:

$<(DP)(\bar{u}_2)(h),h> \geq \bar{\gamma}_1^2 <(DP)(\bar{u}_1)(h),h>$, adică $(\|h\|_0^{(2)})^2 \geq \bar{\gamma}_1^2 (\|h\|_0^{(1)})^2$, $(\forall)h \in D(P)$, de unde $\|h\|_0^{(2)} \geq \bar{\gamma}_1 \|h\|_0^{(1)}$, $(\forall)h \in D(P)$.

Am notat cu $\|h\|_0^{(i)} = (<(DP)(\bar{u}_i)(h),h>)^{1/2}$, $i = \overline{1,2}$.

Analog obținem $\|h\|_0^{(1)} \geq \bar{\gamma}_2 \|h\|_0^{(2)}$, $(\forall)h \in D(P)$, deci cele două norme sunt echivalente.

Ca şi în teorema 2 de la paragraful 2.3 se arată că H_0 se scufundă în H cu o injecție liniară şi continuă, adică există $\varphi : H_0 \to H$, liniară, continuă, injectivă şi $\varphi|_{D(P)} = I|_{D(P)}$.

Teorema 1

În ipotezele de lucru de până acum (adică ale teoremei variaționale întărite a lui Langenbach plus ipoteza (H_5)) avem :

1)Orice şir minimizant pentru F are limită în H_0;

2)Toate şirurile minimizante pentru F au aceeaşi limită în H_0, fie ea u_0;

3)$\varphi(u_0) = u_s$.

Demonstrație:

1) Dacă $u_1, u_2 \in D(P)$ atunci:

$$<Pu_1 - Pu_2, u_1 - u_2> = \int_0^1 <(DP)(u_2+t(u_1 - u_2))(u_1 - u_2), u_1 - u_2>dt \geq$$

$$\geq \int_0^1 \bar{\gamma}^2 <(DP)(\bar{u})(u_1 - u_2), u_1 - u_2>dt = \bar{\gamma}^2 \|u_1 - u_2\|_0^2.$$

Pe de altă parte, din demonstrația teoremei variaționale întărite, punctul 2), pentru $(\forall)u_1, u_2 \in D(P)$, $u_1 \neq u_2$ şi $(\forall)\ \lambda \in (0,1)$ avem :

$$(1-\lambda) F(u_1) + \lambda F(u_2) - F((1-\lambda)u_1 + \lambda u_2) =$$

$$= \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 \frac{1}{t} <P(u_1 + t(u_2 - u_1)) - P(u_1 + t\lambda(u_2 - u_1)), t(1-\lambda)(u_2 - u_1)> dt \geq$$

$$\geq \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 \bar{\gamma}^2 \frac{1}{t} \|t(1-\lambda)(u_2 - u_1)\|_0^2 dt = \frac{\bar{\gamma}^2}{2}\lambda(1-\lambda)\|u_2 - u_1\|_0^2, \text{ deci :}$$

$$\frac{\bar{\gamma}^2}{2}\lambda(1-\lambda)\|u_2 - u_1\|_0^2 \leq (1-\lambda) F(u_1) + \lambda F(u_2) - F((1-\lambda)u_1 + \lambda u_2),$$

$$(\forall) u_1, u_2 \in D(P), \lambda \in [0,1] \qquad \textbf{(5)}$$

Fie $(u_n) \subset D(P)$ şir minimizant pentru F pe D(P), deci $F(u_n) \to d = \inf\limits_{D(P)} F$.

Înlocuind în (**5**) pe u_2 cu u_m şi pe u_1 cu u_n obținem :

$$\frac{\bar{\gamma}^2}{2}\lambda(1-\lambda)\|u_m - u_n\|_0^2 \leq (1-\lambda) F(u_n) + \lambda F(u_m) - F((1-\lambda)u_n + \lambda u_m) \leq$$

$$\leq (1-\lambda) F(u_n) + \lambda F(u_m) - d.$$

Cum $F(u_n) \to d$, pentru $n \to \infty$, şi $F(u_m) \to d$, pentru $m \to \infty$ rezultă că : $\|u_m - u_n\|_0 \to 0$, pentru $m,n \to \infty$, deci (u_n) este şir Cauchy în H_0 şi atunci e convergent în H_0.

2) Fie $(u_n),(v_n) \subset D(P)$ şiruri minimizante pentru F pe D(P). Folosind (**5**) vom avea :

$$\frac{\bar{\gamma}^2}{2}\lambda(1-\lambda)\|u_n - v_n\|_0^2 \leq (1-\lambda) F(v_n) + \lambda F(u_n) - F((1-\lambda)v_n + \lambda u_n) \leq$$

$\leq (1-\lambda) F(v_n) + \lambda F(u_n) - d \to 0$, pentru $n \to \infty$, deoarece $F(u_n) \to d$, $F(v_n) \to d$, pentru $n \to \infty$.

Astfel obținem $\|u_n - v_n\|_0 \to 0$, pentru $n \to \infty$ şi cum (u_n) şi (v_n) sunt convergente în H_0 rezultă că au aceeaşi limită.

3) Fie $(u_n) \subset D(P)$ şir minimizant pentru F pe D(P), $F(u_n) \to d$, pentru $n \to \infty$.

Fie $u_0 = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, în H_0 (în $\|\cdot\|_0$). Din proprietățile funcției φ avem că : $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_H} \varphi(u_0)$ deci $\varphi(u_0)$ este soluția generalizată a ecuației $Pu = f$, $\varphi(u_0) = u_s$

3.6. Soluții generalizate în sens Sobolev

Vom considera două exemple ce intervin în mecanica solidelor deformabile, pentru care teoria prezentată anterior se poate aplica. Detalii vor fi omise.

Exemplu 1.

Problema torsiunii barelor cilindrice în teoria Hencky-Nadai.

În această teorie, funcția de tensiune u trebuie să satisfacă:

$$Pu = -\frac{\partial}{\partial x}[f(\tau(u))\frac{\partial u}{\partial x}] - \frac{\partial}{\partial y}[f(\tau(u))\frac{\partial u}{\partial y}] = 2\omega \text{ în } \Omega,$$

Ω fiind secțiunea barei, cu condiția la frontieră $u|_{\partial\Omega}=0$, unde τ este forma patratică nenegativă:

$$\tau(u)=|\text{grad } u|^2 = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2$$

iar ω este o constantă cu interpretarea mecanică de torsiune corespunzătoare unității de lungime.

Presupunem că funcția f (care caracterizează materialul) satisface următoarele condiții:

a) $f \in C^{(2)}[0,+\infty)$

b) $f(\xi) \geq c_1 > 0, \forall \xi \geq 0$

c) $f(\xi) + 2\xi f'(\xi) \geq c_2 > 0, \forall \xi \geq 0$

Atunci avem:

Teorema 1:

Ipotezele teoremei variaționale întărite a lui Langenbach sunt satisfăcute în următorul cadru funcțional:

$$H=L_2(\Omega),\ D(P)=\{u \in C^2(\overline{\Omega}) \mid u|_{\partial\Omega}=0\} \subset L_2(\Omega),$$

$$Pu = -\frac{\partial}{\partial x}[f(\tau(u))\frac{\partial u}{\partial x}] - \frac{\partial}{\partial y}[f(\tau(u))\frac{\partial u}{\partial y}] : D(P) \to L_2(\Omega).$$

Demonstrație:

Efectuând calcule simple obținem:

$$(DP)(u)\cdot h = -\frac{\partial}{\partial x}\{[f(\tau(u)) + 2f'(\tau(u))(\frac{\partial u}{\partial x})^2]\frac{\partial h}{\partial x} + 2f'(\tau(u))\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}]\} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\{[f(\tau(u)) + 2f'(\tau(u))(\frac{\partial u}{\partial y})^2]\cdot\frac{\partial h}{\partial y} + 2f'(\tau(u))\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}\}$$

Pentru orice $u,h,g \in D(P)$ avem:

$< (DP)(u)\cdot h, g >_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega [f(\tau(u)\tau(h,g) + 2f'(\tau(u)\tau(u,h)\tau(u,g)]dxdy =< (DP)(u)\cdot g, h >_{L_2(\Omega)}$ und

e $\tau(h,g) = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}$.

Dacă în relația de mai sus punem g=h, pentru orice u,h$\in$D(P) obținem:

$$< (DP)(u)\cdot h, h >_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega [f(\tau(u)\tau(h) + 2f'(\tau(u))\tau^2(u,h)]dxdy \ge c\int_\Omega \tau(u)dxdy\,,$$

unde c=min(c_1,c_2).

Dacă adaugăm inegalitatea lui Friedrichs , care este valabilă pentru orice u din D(P) , $\int_\Omega \tau(u)dxdy \ge \chi\int_\Omega u^2 dxdy$, obținem:

$$< (DP)(u)\cdot h, h >_{L_2(\Omega)} \ge c\chi \| u \|^2_{L_2(\Omega)}$$

Din teorema variațională întărită a lui Langenbach (teorema 1 de la paragraful 3.2) şi teorema anterioară rezultă :

Teorema 2.

Dacă funcția materială a teoriei Hencky-Nadai satisface condițiile a)-c), atunci:

1) Operatorul torsiunii elasto-plastice pentru bare cu consolidare este tare monoton pe D(P) : $\forall$ u_1,u_2 $\in$D(P),

$$< Pu_1 - Pu_2, u_1 - u_2 >_{L_2(\Omega)} \ge c\chi \| u_1 - u_2 \|^2_{L_2(\Omega)}$$

Ca o consecință, dacă ecuația $Pu = -\frac{\partial}{\partial x}[f(\tau(u))\frac{\partial u}{\partial x}] - \frac{\partial}{\partial y}[f(\tau(u))\frac{\partial u}{\partial y}] = 2\omega$ are o soluție în D(P) această soluție este unică şi realizează pe D(P) minimul următoarei funcționale:

$$F(u)=\int_0^1 < P(tu), u >_{L_2(\Omega)} dt - < 2\omega, u >_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega dxdy \int_0^{\tau(u)} \frac{1}{2} f(\xi)d\xi - 2\omega\int_\Omega udxdy$$

2) Reciproc, dacă există u_0 din D(P) care minimizează pe D(P) funcționala de mai sus , atunci u_0 este soluție a ecuației $Pu = -\frac{\partial}{\partial x}[f(\tau(u))\frac{\partial u}{\partial x}] - \frac{\partial}{\partial y}[f(\tau(u))\frac{\partial u}{\partial y}] = 2\omega$, şi conform punctului anterior unica soluție în D(P) a acestei ecuații.

3) Funcționala de mai sus este marginită inferior şi uniform convexă pe D(P).

4) Orice şir minimizant al funcționalei F pe D(P) converge în $L_2(\Omega)$.

5) Toate şirurile minimizante au aceeaşi limită în $L_2(\Omega)$.

Exemplul 2:

Deformarea plăcilor fixate rigid la frontieră, sub presiune normală în teoria Hencky-Nadai.

Problema se reduce la găsirea soluției ecuației:

$$Pu = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[g(H(u))(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial y^2})] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}[g(H(u))\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[g(H(u))(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})] = f(x,y)$$

în Ω, pe care trebuie s-o satisfacă deplasarea u(x,y) a suprafeței mediane, cu condițiile la frontieră :

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Aici g este funcția care caracterizează materialul şi satisface condițiile:

a) g$\in C^{(2)}[0,+\infty)$;

b) g(ξ) $\geq c_1 > 0, \forall \xi \geq 0$

c) $g(\xi) + 2\xi g'(\xi) \geq c_2 > 0, \forall \xi \geq 0$,

iar H este forma patratică nenegativă:

$$H(u) = (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2 + (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Teorema 3

Ipotezele teoremei variaționale întărite sunt satisfăcute în următorul cadru funcțional:

$$H=L_2(\Omega),\ D(P)=\{u \in C^4(\overline{\Omega}) \mid u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0\} \subset L_2(\Omega),$$

P:D(P)$\to L_2(\Omega)$, f$\in L_2(\Omega)$, f(x,y) fiind proporțională cu încărcarea normală considerată pe unitatea de suprafață ce conține punctul (x,y).

Demonstrație:

Într-adevar, pentru orice u,h$\in$D(P), există (**D**P)(u)·h, liniară în h şi continuă în u în orice hiperplan bidimensional ce trece prin u. Concret, $\forall$ u,h$\in$D(P),

$$(DP)(u)\cdot h = \frac{\partial^2 A(u,h)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B(u,h)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C(u,h)}{\partial x \partial y},$$

unde:

$$A(u,h) = g(H(u))(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}) + 2g'(H(u))(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})H(u,h)$$

$$B(u,h) = g(H(u))(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}) + 2g'(H(u))(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})H(u,h)$$

$$C(u,h) = g(H(u))\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + 2g'(H(u))\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}H(u,h),$$

iar H(u,h) este forma biliniară ce generează forma patratică:

$$H(u,h) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}).$$

În ceea ce priveşte simetria operatorului (DP)(u) pe D(P), să observăm, că $\forall$ u,h,g$\in$D(P) ,

$$< (DP)(u)\cdot h, g >_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega g[(DP)(u)\cdot h]dxdy = \int_\Omega g(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y})dxdy$$

Ținând seama că:

$$g\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(g\frac{\partial A}{\partial x} - A\frac{\partial g}{\partial x}) + A\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

$$g\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(g\frac{\partial B}{\partial y} - B\frac{\partial g}{\partial y}) + B\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

$$g\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(g\frac{\partial C}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y}(C\frac{\partial g}{\partial x}) + C\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}, \text{ avem:}$$

$$< (DP)(u)\cdot h, g >_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \{\frac{\partial}{\partial x}(g\frac{\partial A}{\partial x} - A\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial C}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(g\frac{\partial B}{\partial y} - B\frac{\partial g}{\partial y} - C\frac{\partial g}{\partial x}) + A\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} +$$

$$+ B\frac{\partial^2 y}{\partial g^2} + C\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\}dxdy$$

Calculând ultima integrală prin părți şi ținând seama de condițiile la limită pe care le satisfac funcțiile din D(P), obținem:

$$< (DP)(u)\cdot h, g >_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega (A\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + C\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y})dxdy = \int_\Omega [g(H(u))H(h,g) + 2g'(H(u))H^2(u,h)]dxdy =$$

$$=< (DP)(u)\cdot g, h >_{L_2(\Omega)}$$

Pentru a dovedi că operatorul (DP)(u) este pozitiv definit pe D(P), este suficient să observăm că, din relația de mai sus , pentru g=h , rezultă:

$$< (DP)(u)\cdot h, h >_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega [g(H(u))H(h) + 2g(H(u))H^2(u,h)]dxdy$$

Se arată că:

$$\int_\Omega [g(H(u))H(h) + 2g'(H(u))H^2(u,h)]dxdy \ge c\int_\Omega H(h)dxdy, c = \min(c_1, c_2).$$

În sfârşit, se arată că:

$$\int_{\Omega} H(h)dxdy \geq \chi \int_{\Omega} |\, gradh\,|^2 \; dxdy \geq \chi^2 \; \| h \|^2_{L_2(\Omega)} \;,$$

astfel, că în final, avem , $\forall$ u,h $\in$ D(P) ,

$$< (DP)(u) \cdot h, h >_{L_2(\Omega)} \geq c\chi^2 \; \| h \|^2_{L_2(\Omega)} \,,$$

χ fiind constanta ce intervine în inegalitatea lui Friedrichs.

Din teorema variaţională întărită a lui Langenbach şi teorema anterioară (teorema 3) rezultă:

Teorema 4

Dacă funcția materială g a teoriei Hencky-Nadai satisface condițiile a)-c) iar încărcarea normală f $\in$ $L_2(\Omega)$, atunci:

1) operatorul încovoierii plăcilor elasto-plastice rigid încastrate la frontieră este tare monoton pe D(P) : $\forall$ $u_1, u_2 \in$ D(P),

$$< Pu_1 - Pu_2, u_1 - u_2 >_{L_2(\Omega)} \geq c\chi^2 \; \| u_1 - u_2 \|^2_{L_2(\Omega)}$$

Ca o consecință , dacă ecuația :

$Pu = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[g(H(u))(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial y^2})] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}[g(H(u))\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[g(H(u))(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})] = f(x,y)$ admite o soluție în D(P), această soluție este unică şi realizează pe D(P) minimul următoarei funcționale:

$$F(u) = \int_0^1 < P(tu), u >_{L_2(\Omega)} dt - < f, u >_{L_2(\Omega)} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} dxdy \int_0^{H(u)} g(\xi)d\xi - \int_{\Omega} fudxdy$$

2) Reciproc , dacă există $u_0 \in$ D(P) care minimizează funcționala de mai sus pe D(P) , atunci u_0 este soluție a ecuației :

$$Pu = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[g(H(u))(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial y^2})] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}[g(H(u))\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[g(H(u))(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})] = f(x,y)$$

3) Funcționala F este marginită inferior şi uniform convexă pe D(P).

4) Orice şir minimizant al funcționalei F are limită în $L_2(\Omega)$.

5) Toate şirurile minimizante ale funcționalei F au aceeaşi limită în $L_2(\Omega)$.

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

[1] H. Brezis, Analiză funcţională.Teorie şi aplicaţii, Editura Academiei, Bucureşti 2002.

[2] O. Cârjă, Unele metode de analiză funcţională neliniară, Editura Matrix-ROM, Bucureşti 2003.

[3] J. Crînganu, Calcul variaţional , EDP Bucureşti, 2002.

[4] R. Cristescu, Noţiuni de analiză funcţională liniară, Editura Academiei Române, Bucureşti 1998.

[5] G. Dincă, Metode variaţionale şi aplicaţii, Editura Tehnică , Bucureşti 1980.

[6] E. Popa, Culegere de probleme de analiză funcţională, EDP, Bucureşti 1981.

[7] D. Răducanu, Introducere în teoria măsurii şi integrării, Editura Albastră, Cluj-Napoca 2001.

[8] V. Rădulescu, Aplicaţii ale teoriei operatorilor în analiza neliniară, Craiova 1993.

[9] W. Rudin, Functional Analysis, Mc.Graw-Hill , 1973

[10] Dicţionar de analiză matematică, Editura Ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti 1989.