ANTOHE FLORIN-MIHAI

Inegalitatea mediilor și aplicațiile ei

-Lucrare științifică-

Editura Sfântul Ierarh Nicolae
2010

ISBN 978-606-8129-61-7

Cuvânt înainte

Lucrarea ştiinţifică de faţă abordează Inegalitatea mediilor, una dintre cele mai importante şi mai cunoscute inegalităţi din matematică.

În conţinutul lucrării sunt prezentate diverse demonstraţii ale acestei inegalităţi: prin metode algebrice, geometrice, utilizând noţiuni matematice precum inducţia sau folosind arii.

Cu ajutorul inegalităţii mediilor am construit câteva inegalităţi în triunghi.

În partea finală a lucrării sunt puse în evidenţă aplicaţiile inegalităţii mediilor şi anume: aplicaţii în demonstrarea unor inegalităţi algebrice, demonstrarea unor inegalităţi geometrice, determinarea minimului sau maximului unei expresii algebrice şi nu în ultimul rând aplicaţii în fizică.

Autorul

Cuprins

1. Introducere

Inegalitatea mediilor este una dintre cele mai importante inegalități , fiind foarte des utilizată. Această inegalitate este atribuită matematicianului francez Augustin-Louis Cauchy care s-a remarcat în aproape toate ramurile matematicii.

1. Media aritmetică

Fie a şi b două numere reale şi pozitive . Media aritmetică a lor este numărul care se obține împărțind la 2 suma lor : $m_a = \dfrac{a+b}{2}$.

Generalizând obținem că media aritmetică a n numere reale pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$ se calculează după formula:

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$$

adică împărțind suma celor n numere la numărul lor.

Observație: Media aritmetică a n numere reale pozitive este mai mare decât cel mai mic dintre numere şi este mai mare decât cel mai mare dintre ele.

2. Media geometrică (media proporțională).

Media geometrică a două numere reale pozitive se calculează după formula :

$$m_g = \sqrt{a \cdot b}$$

Generalizând obținem că media geometrică a n numere reale pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$ se calculează după formula:

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$$

Exemple de medii geometrice întâlnite în geometrie:

1. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii din vârful unghiului drept este medie geometrică (proporțională) între lungimile proiecțiilor pe ipotenuză.
2. Într-un triunghi dreptunghic , lungimea unei catete este medie geometrică (proporțională) între lungimea ipotenuzei şi proiecția catetei pe ipotenuză.

3. Media armonică.

Media armonică a două numere reale pozitive este:

$$m_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Generalizând obținem că media armonică a n numere reale pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$ se obține după formula :

$$m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

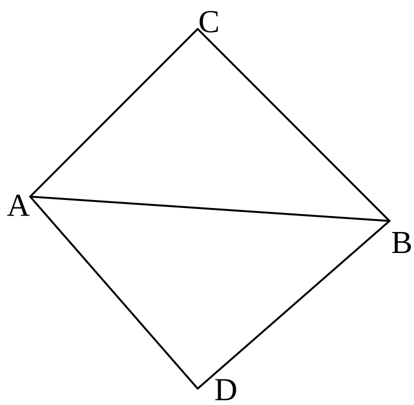
Observație: Media armonică este inversa mediei aritmetice a inverselor celor n numere.

4. Media patratică.

Media pătratică a numerelor pozitive a, b este numărul :

$$m_p = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} .$$

Media pătratică are o interpretare geometrică deosebit de interesantă.
Dacă considerăm ΔABC dreptunghic , cu catetele de lungimi AC=a şi BC=b evident ipotenuza AB va avea lungimea $\sqrt{a^2 + b^2}$.



Construim un triunghi dreptunghic isoscel ADB , dreptunghic în D.
Atunci AD=BD=$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.
Deci lungimea pătratului înscris în cercul circumscris dreptunghiului de dimensiuni a, b reprezintă media pătratică a numerelor a şi b.

Media pătratică a n numere reale pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$ este dată de formula:

$$m_p = \sqrt{\frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \ldots + {a_n}^2}{n}} .$$

2. Inegalitatea mediilor
-Prezentare, demonstrație algebrică-

Între toate aceste medii prezentate , există următoarea relație , cunoscută sub denumirea de inegalitatea mediilor:

$$\min(a,b) \le m_h \le m_g \le m_a \le m_p \le \max(a,b) \quad \text{, adică:}$$

$$\min(a,b) \le \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \max(a,b)$$

Egalitatea se obține atunci când cele două numere a şi b sunt egale.

Prin generalizare se obține:

$$\min(x_1, x_2, ...x_n) \le m_h \le m_g \le m_a \le m_p \le \max(x_1, x_2, ..., x_n) \text{, adică:}$$

$$\min(x_1, x_2, ...x_n) \le \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \le \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \le \sqrt{\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+...{x_n}^2}{n}} \le$$

$$\le \max(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Egalitatea se obține pentru $x_1 = x_2 = ... = x_n$

În continuare vom demonstra inegalitatea mediilor pentru două numere pe bucăți:
Pentru început să demonstrăm prin metodă algebrică inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică , care este extrem de simplă.

a) $m_g \le m_a$

Deci trebuie să demonstrăm că: $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$.

$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \le a+b \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \ge 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$, ceea ce este evident , deci inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică este demonstrată.

Vom demonstra acum inegalitatea dintre media armonică şi media geometrică a două numere:
Avem de demonstrat :

Folosind ceea ce am demonstrat anterior $m_g \le m_a$, pentru numere $\frac{1}{a}$ şi $\frac{1}{b}$ obținem:

$\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}} \le \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{ab}} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab}$ (ceea ce trebuia demonstrat).

Mai rămâne să demostrăm inegalitatea dintre media aritmetică şi media pătratică , adică: $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Pornim de la faptul că: $(a-b)^2 \geq 0$

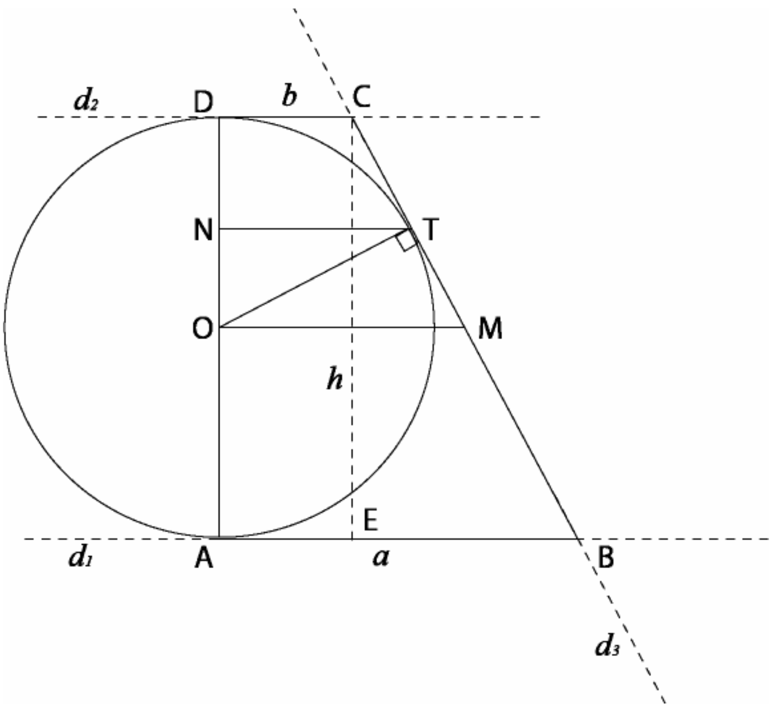
$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

adică exact ce aveam de demonstrat.

3. O demonstrație geometrică a inegalității mediilor

Fie d_1 şi d_2 două tangente paralele la cercul C în punctele A, respectiv D. Dreapta d_3 este tangentă în punctul T la cercul C şi intersectează dreptele d_1 şi d_2 în B şi respectiv în C. Luăm punctul M la mijlocul lui BC şi N piciorul perpendicularei din T pe AD. Astfel se formează trapezul dreptunghic $ABCD$.



Notăm:

$AB = a, \quad DC = b,$ unde conform desenului $a > b$.

Avem

$BT = AB \Rightarrow BT = a$

$CT = DC \Rightarrow CT = b$

$BC = a + b$

Înălțimea trapezului $ABCD$ este:

$$h = \sqrt{BC^2 - EB^2} = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 2\sqrt{ab}.$$

$$OT = \frac{h}{2} = \sqrt{ab} = m_g$$

$$OM = \frac{a+b}{2} = m_a$$

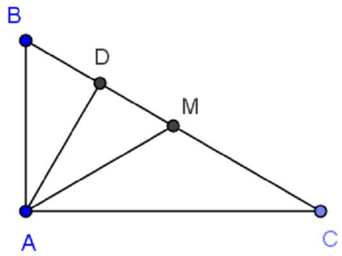
$$\Delta NOT \sim \Delta TMO \Leftrightarrow \frac{TN}{OT} = \frac{OT}{MO} \Leftrightarrow TN = \frac{OT^2}{MO} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = m_h$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\Delta NOT : TN \text{ catetă} \\ OT \text{ ipotenuză}\end{array}\right\} \Rightarrow OT > TN \\ \\ \left.\begin{array}{r}\Delta TMO : OT \text{ catetă} \\ OM \text{ ipotenuză}\end{array}\right\} \Rightarrow OT < OM\end{array}\right\} \Rightarrow OM > OT > TN \quad \text{adică } m_a > m_g > m_h$$

Dacă $a = b$, atunci în mod evident $m_a = m_g = m_h$.

4. Altă demonstraţie geometrică a inegalităţii mediilor

Considerăm un triunghi dreptunghic cu ipotenuza BC. Notăm CD cu a şi DB cu b. Construim înălțimea din vârful unghiului drept , adică AD. (AD $\perp$ BC).



Ştim că într-un triunghi dreptunghic mediana dusă din vârful unghiului drept are lungimea jumătate din lungimea ipotenuzei.

Deci AM=$\frac{a+b}{2}$.

Aplicând teorema înălțimii rezultă că AD=$\sqrt{ab}$.

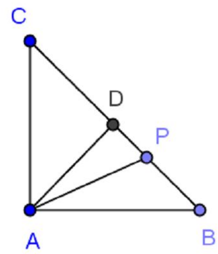
Cum înălțimea este întotdeauna mai mică sau cel mult egală cu mediana rezultă:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Egalitatea se obține când a=b adică CD=DB , deci în cazul unui triunghi dreptunghic isoscel.

Astfel am demonstrat inegalitatea dintre media geometrică şi media aritmetică.

Considerăm acum un triunghi dreptunghic isoscel ABC. Fixăm un punct pe ipotenuza BC pe care îl notăm cu P. Dorim să demonstrăm că $AP^2 = \frac{PB^2 + PC^2}{2}$. Înălțimea din vârful drept AD va fi în acest caz şi mediană.



În acest caz mediana AD=$\frac{PB+PC}{2}$.

Presupunem că CP$\geq$PD. PD=CP-CD=CP-$\frac{BC}{2} = CP - \frac{PC+PB}{2} = \frac{CP-BP}{2}$.

Cu teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ADP obținem:

$$AD^2 + PD^2 = AP^2$$

$$AP^2 = \frac{(PB+PC)^2}{4} + \frac{(PC-PB)^2}{4} = \frac{PB^2 + PC^2}{2}.$$

Este evident faptul că AD=$\dfrac{PB+PC}{2}$ este mai mică sau cel mult egală cu AP=$\sqrt{\dfrac{PB^2+PC^2}{2}}$.

Deducem că: $\dfrac{PB+PC}{2} \le \sqrt{\dfrac{PB^2+PC^2}{2}}$. Egalitatea se obține când punctul P este mijlocul ipotenuzei BC.

Am demonstrat astfel , în manieră geometrică inegalitatea dintre media aritmetică şi media pătratică a două numere.

În final ne propunem să demonstrăm inegalitatea dintre media armonică şi media geometrică.

Pentru aceasta considerăm un trapez dreptunghic cu bazele de lungimi a şi b , iar înălțimea AB= $2\sqrt{ab}$. Cercul de diametru AB este tangent laturii CD în punctul T. Fie M mijlocul lui CD.

MO va fi linie mijlocie , deci MO=$\dfrac{a+b}{2}$. OT=$\sqrt{ab}$, fiind rază a cercului de diametru AB.

Ne interesează să calculăm lungimea lui PT.

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic OTM obținem:

$$OT^2+TM^2=OM^2 \Rightarrow TM^2=\frac{(a+b)^2}{4}-ab=\frac{(a-b)^2}{4} \Rightarrow TM=\frac{a-b}{2}$$

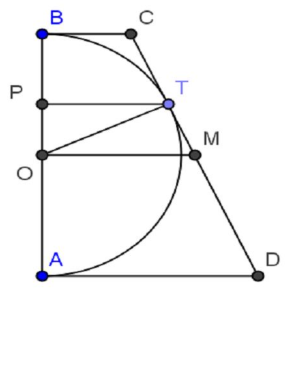
Calculăm înălțimea din vârful drept al triunghiului dreptunghic OTM care este egală cu PO.

$$\text{Deci PO=}\frac{\sqrt{ab}\cdot\frac{a-b}{2}}{\frac{a+b}{2}}=\frac{(a-b)\cdot\sqrt{ab}}{a+b}$$

Aplicăm acum în triunghiul dreptunghic TPO teorema lui Pitagora pentru a determina lungimea lui TP:

$$PT^2=OT^2-PO^2=ab-\frac{ab\cdot(a-b)^2}{(a+b)^2}=\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \Rightarrow PT=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

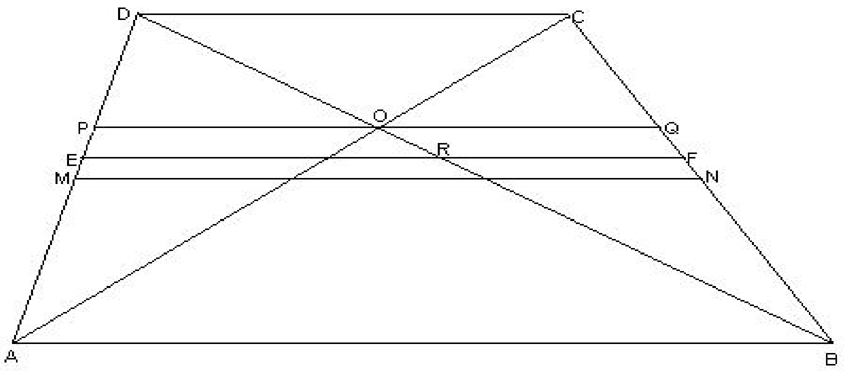
Evident PT<TO adică $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab}$. Deci media armonică este mai mică sau egală cu media geometrică.



5. O interpretare geometrică a inegalității mediilor

În continuare , ne propunem să dăm o interpretare geometrică a inegalității mediilor, pentru două numere strict poztive a şi b:

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$



În trapezul ABCD; AB|| CD, astfel încât AB = a şi CD = b; a > b, ducem linia mijlocie [MN] şi paralele [EF] şi [PQ] la bazele trapezului.

[EF] împarte latura [AD] în raportul $\sqrt{\frac{a}{b}}$ şi [PQ] trece prin punctul O de intersecție a diagonalelor.

În Δ ACD : PQ || CD şi folosind teorema lui Thales $\Rightarrow \frac{AP}{PD} = \frac{AO}{OC}$.

Dar ΔAOB ~ ΔCOD şi deci $\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{DC} = \frac{a}{b}$

Din cele două relații rezultă că:

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AO}{OC} = \frac{AB}{DC} = \frac{a}{b}$$

Deoarece $\frac{AM}{MD} = 1; \frac{AE}{ED} = \sqrt{\frac{a}{b}},$ din inegalitățile evidente

$1 \le \sqrt{\frac{a}{b}} \le \frac{a}{b}$ rezultă $\frac{AM}{MD} \le \frac{AE}{ED} \le \frac{AP}{PD}$

Urmează că pe segmentul [AD] există următoarele ordine a punctelor A,M,E,P,D, adică:

$b<PQ<EF<MN<a$ (1)

Se demonstrează uşor că $PQ \equiv 2OP$

$\Delta AOP \sim \Delta ACD$: $\frac{AO}{AC}=\frac{PO}{DC}$ (a)

$\Delta BOQ \sim \Delta BDC$: $\frac{BO}{BD}=\frac{OQ}{DC}$ (a)

Din (a) şi (b) $\Rightarrow \frac{PO}{DC}=\frac{OQ}{DC} \Rightarrow PO=OQ$

Deci PQ = 2OP

$\Delta AOP \sim \Delta ACD$: $\frac{AO}{AC}=\frac{PO}{DC}=\frac{AP}{AD}$ (1)

$\Delta AOB \sim \Delta COD$: $\frac{AO}{OC}=\frac{AB}{DC}$ (2)

Din (1) $\Rightarrow \frac{AO}{AC}=\frac{PO}{DC} \Rightarrow \frac{AC}{AO}=\frac{DC}{PO} \Rightarrow \frac{AO+OC}{AO}=\frac{DC}{PO} \Rightarrow 1+\frac{OC}{AO}=\frac{DC}{PO}$

Din (2)

$$\Rightarrow \frac{OC}{AO}=\frac{DC}{AB} \Rightarrow 1+\frac{DC}{AB}=\frac{DC}{PO} \Rightarrow 1+\frac{b}{a}=\frac{b}{PO} \Rightarrow PO=\frac{b}{\frac{a+b}{a}}=\frac{ab}{a+b} \Rightarrow PQ=\frac{2ab}{a+b}=m_h(a,b)$$

$\Delta DER \sim \Delta DAB$: $\frac{DE}{DA}=\frac{ER}{AB}=\frac{DR}{DB}$.

Din:

$$\frac{AE}{ED}=\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{AD-ED}{ED}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{AD}{ED}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+1 \Rightarrow \frac{AD}{ED}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{ED}{AD}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Din $\frac{ED}{AD}=\frac{ER}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{ER}{a} \Rightarrow ER=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (3)

Din:

$$\frac{AE}{ED}=\sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow \frac{BF}{FC}=\sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow \frac{BF}{BC-BF}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{BC-BF}{BF}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{BC}{BF}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+1 \Rightarrow \frac{BC}{BF}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{BF}{BC}$$

$\Delta BFR \sim \Delta BCD$: $\frac{BF}{BC}=\frac{FR}{DC} \Rightarrow \frac{FR}{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (4)

Din (3) şi (4) $\Rightarrow EF = ER + RF = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) = \sqrt{ab}$

Deci $EF = \sqrt{ab} = m_g(a,b).$

$MN = \frac{a+b}{2} = m_a(a,b).$

Din $b<PQ<EF<MN<a \Rightarrow m_h<m_g<m_a$.

6. O demonstrație prin inducție a inegalității dintre media aritmetică şi media geometrică a n numere

În continuare vom prezenta două demonstrații celebre ale inegalității dintre media geometrică şi media aritmetică a n numere , care apelează la inducția matematică.

În fond putem prezenta acest lucru sub forma următoarei probleme:

Pentru $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ să se arate că:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

1. **Demonstrația lui Ehlers.**

Demonstrăm mai întâi prin inducție următoarea propoziție :

P(n) : Dacă $x_i > 0$, i=1,2,...,n si $x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1$, atunci $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$.

P(1) este adevărată , $x_1 = 1$.

Presupunem P(n) adevărată , adică inegalitatea adevărată pentru n numere.

Din $x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_n x_{n+1} = 1$ rezultă că există două numere x_i, x_j astfel încât $x_i \geq 1$ şi $x_j \leq 1$.

Fără a particulariza luăm $x_1 \geq 1$ şi $x_2 \leq 1$.

Deci $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 0$, adică $x_1 x_2 + 1 \leq x_1 + x_2$ şi deci :

$$x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} \geq 1 + x_1 x_2 + x_3 + ... + x_{n+1} \qquad (1)$$

$x_1 x_2, x_3, ..., x_{n+1}$ sunt n numere cu produsul egal cu 1 şi deci :

$x_1 x_2 + x_3 + ... + x_{n+1} \geq n$.

Ținând cont de relația (1) , rezultă : $x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} \geq 1 + n$.

Deci P(n) $\rightarrow$ P(n+1) este adevărată , deci P(n) este adevărată pentru orice n $\in$ N, n $\geq$ 1.

Punem acum $x_1 = \frac{a_1}{G}, x_2 = \frac{a_2}{G}, ..., x_n = \frac{a_n}{G}$, $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_n}$.

$x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1$ şi deci $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$, adică :

$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{G} \geq n$ şi deci $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_n}$.

2. **Demonstrația lui Jacobsthal.**

Şi această a doua demonstrație foloseşte tot inducția matematică.

Pentru n=1 avem egalitate :

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{şi} \quad G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\ .$$

Avem de demonstrat propoziția P(n) : $A_n \geq G_n$ oricare ar fi n$\in$N , n$\geq$1.

Punem P(n-1) adevărată şi demonstrăm că implicația P(n-1)$\rightarrow$P(n) adevărată.

Fie $z \geq 0$. Deoarece $z^n - nz + n - 1 = (z-1)^2\left(z^{n-2} + 2z^{n-3} + \ldots + n - 1\right)$ avem :

$$z^n \geq nz - (n-1)\ ,\ \text{pentru}\ z \geq 0.$$

Punem $z = \dfrac{G_n}{G_{n-1}}$ şi avem $\left(\dfrac{G_n}{G_{n-1}}\right)^n \geq n\dfrac{G_n}{G_{n-1}} - (n-1).$

Avem identitatea :

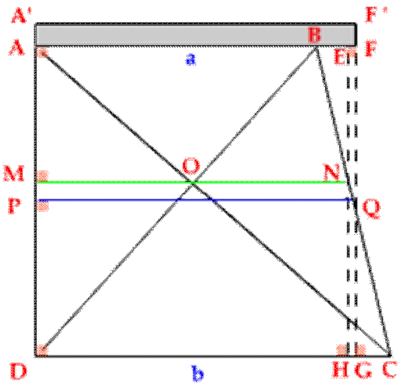
$$A_n = \frac{G_{n-1}}{n}\left[(n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} + \left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right)^n\right], \text{ din care deducem :}$$

$$A_n \geq \frac{G_{n-1}}{n}\left[(n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} + \frac{nG_n}{G_{n-1}} - (n-1)\right], \text{ care conduce la:}$$

$$A_n - G_n \geq \frac{n-1}{n}\left(A_{n-1} - G_{n-1}\right).$$

Deoarece $A_{n-1} - G_{n-1} \geq 0$, rezultă $A_n \geq G_n$ şi deci P(n) este adevărată pentru orice n$\in$N , $n \geq 1$

7. O demonstrație a inegalității mediilor folosind arii



Construcție

Se construiește trapezul dreptunghic ABCD, astfel încât:

- [AB] = a
- [CD] = b
- d(AB, CD) = [AD] = $h = \dfrac{2ab}{a+b} = m_h$

Demonstrație:

Fie $MN || AB$, MN trece prin intersecția diagonalelor, *O*.

$$\left.\begin{array}{l} In\ \Delta BCD: \dfrac{ON}{CD} = \dfrac{BO}{BD} = \dfrac{BN}{BC} \\ In\ \Delta ABC: \dfrac{ON}{AB} = \dfrac{CO}{AC} = \dfrac{CN}{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ON}{CD} + \frac{ON}{AB} = \frac{BN+CN}{BC} = 1 \Rightarrow ON = \frac{1}{\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{CD}} \tag{1}$$

$$Ana\log\ OM = \frac{1}{\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{CD}} \tag{2}$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow [MN] = \frac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} = m_h \tag{3}$$

Fie $PQ || AB$, (***P* mijlocul laturii AD**). Aplicând Th. Thales în ΔABD și ΔBDC rezultă:

$$[PQ] = \frac{AB+CD}{2} \Rightarrow [PQ] = \frac{a+b}{2} = m_a \tag{4}$$

Punctul de intersecție al diagonalelor se găsește deasupra dreptei PQ, rezultă:

$$[PQ] \geq [MN] \tag{5}$$

Din relațiile (3), (4) și (5) rezultă:

$$m_a \geq m_h \tag{6}$$

Fie S_{AEHD} = aria dreptunghiului AEHD. Ținând cont de relația (3), atunci:

$$S_{AEHD} = AE \cdot AD = MN \cdot AD = m_h^2 \tag{7}$$

$S_{ABCD} = \dfrac{AD(AB+CD)}{2} = \dfrac{2ab}{a+b} \cdot \dfrac{a+b}{2} = ab = m_g^2$	**(8)**

Deoarece [BQ]≡[QC] (*din construție*) şi [BN] < [NC], rezultă:

$S_{\Delta BEN} \leq S_{\Delta NCH}$ (*cu egalitate când [AB]≡[CD]*)	**(9)**

Aria trapezului ABCD mai poate fi scrisă şi ca:

$S_{ABCD} = S_{AEHD} - S_{\Delta BEN} + S_{\Delta NCH}$	**(10)**

Din (7), (8), (9) şi (10) rezultă:

$m_g^2 \geq m_h^2 \Rightarrow m_g \geq m_h$	**(11)**

Din relația (6) $\Rightarrow (\exists) A'$ deasupra lui A, a.î:

$A'D = \dfrac{a+b}{2} = m_a$	**(12)**

Din relațiile (4) şi (12), rezultă:

$m_a^2 = PQ \cdot A'D = S_{A'F'GD} = S_{A'F'FA} + S_{AFGD} = S_{A'F'FA} + S_{ABCD} = S_{A'F'FA} + m_g^2$ $\Rightarrow m_a^2 \geq m_g^2 \Rightarrow m_a \geq m_g$	**(13)**

Din relațiile (11) şi (13), rezultă:

$m_a \geq m_g \geq m_h$	**q.e.d**

8. Inegalități în triunghi construite cu ajutorul inegalității mediilor

Vom încerca să deducem câteva inegalități în triunghi folosind inegalitatea mediilor.

Măsurile laturilor unui triunghi sunt exprimate prin numere reale pozitive precum şi valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor ascuțite.

Folosind inegalitatea $m_a \geq m_g$ avem:

1. Dacă notăm măsurile laturilor unui triunghi cu a,b,c putem scrie:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}; b+c \geq 2\sqrt{bc}; c+a \geq 2\sqrt{ca} \quad (1)$$

Adunând membru cu membru aceste inegalități rezultă: $2(a+b+c) \geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$ de unde împărțind cu 2 şi înlocuind a+b+c=2p obținem inegalitatea: $2p \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

2.Înmulțind inegalitățile (1) membru cu membru rezultă: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ care după înlocuirile: a+b=2p-c , b+c=2p-a , c+a=2p-b şi abc=4RS (unde R este raza cercului circumscris triunghiului şi S este aria triunghiului) obținem: $(2p-a)(2p-b)(2p-c) \geq 32RS$

3.Din $a+b+c \geq 2\sqrt{a(b+c)}, a+b+c \geq 2\sqrt{b(c+a)}, a+b+c \geq 2\sqrt{c(a+b)}$ (2) prin adunare membru cu membru obținem: $2(a+b+c) \geq 2(\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b(a+c)}+\sqrt{c(a+b)})$ după care obținem inegalitatea: $2p \geq \sqrt{a(2p-a)}+\sqrt{b(2p-b)}+\sqrt{c(2p-c)}$.

4. Înmulțind membru cu membru inegalitățile (2) obținem:
$(a+b+c)^3 \geq 8\sqrt{abc(a+b)(b+c)(c+a)}$ sau $(2p)^6 \geq 64abc(a+b)(b+c)(c+a)$ de unde înlocuind abc=4RS şi S=rp (unde r este raza cercului înscris în triunghi)
avem: $p^6 \geq 4Rrp(a+b)(b+c)(c+a)$ şi în final: $p^5 \geq 4Rr(a+b)(b+c)(c+a)$.

5. Din $ab+c \geq 2\sqrt{abc}, bc+a \geq 2\sqrt{abc}, ca+b \geq 2\sqrt{abc}$ adunând membru cu membru avem: $a+b+c+ab+bc+ca \geq 6\sqrt{abc}$ de unde: $a(b+1)+b(c+1)+c(a+1) \geq 12\sqrt{RS}$.

6. Din $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}, a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ rezultă prin înmulțirea membru cu membru a inegalităților: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$ de unde $2p(a^2+b^2+c^2) \geq 36Rrp$ şi în final: $a^2+b^2+c^2 \geq 18Rr$.

7. Din $a+b+b \geq 3\sqrt[3]{abc}$ şi $h_a+h_b+h_c \geq 3\sqrt[3]{h_a h_b h_c}$ (unde h_a, h_b, h_c sunt inălțimile triunghiului) prin înmulțire membru cu membru rezultă: $(a+b+c)(h_a+h_b+h_c) \geq 9\sqrt[3]{ah_a bh_b ch_c}$ sau $2p(h_a+h_b+h_c) \geq 9\sqrt[3]{8S^3}$ pentru că $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$ şi în final inegalitatea:

$$h_a+h_b+h_c \geq \frac{9S}{p}.$$

8. Din :

$a+b+\sin C \geq 3\sqrt[3]{ab\sin C} = 3\sqrt[3]{2S}, b+c+\sin A \geq 3\sqrt[3]{bc\sin A} = 3\sqrt[3]{2S}, c+a+\sin B \geq 3\sqrt[3]{ca\sin B} = 3\sqrt[3]{2S}$ prin adunare membru cu membru rezultă: 2(a+b+c)+sinA+sinB+sinC$\geq 9\sqrt[3]{2S}$ sau:

$\sin A+\sin B+\sin C \geq 9\sqrt[3]{2S}-4p$. Observație:triunghiul ABC este ascuțitunghic.

Folosind inegalitatea: $m_a \geq m_h$ avem:

9. $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}, \frac{b+c}{2} \geq \frac{2bc}{b+c}, \frac{c+a}{2} \geq \frac{2ca}{c+a}$ .Adunând inegalitățile rezultă:

a+b+c$\geq 2(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a})$ de unde: $p \geq \frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ac}{a+c}$.

Folosind inegalitatea : $m_p \geq m_a$ avem:

10. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} \geq \frac{b+c}{2}, \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}} \geq \frac{a+c}{2}$ .Adunând membru cu membru obținem: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}} \geq a+b+c$, de unde în final: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geq 2\sqrt{2}p$.

9. Aplicații ale inegalității mediilor în demonstrarea unor inegalități algebrice

1. Să se demonstreze că $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca, \forall a,b,c \in R$.

Soluție:

Din inegalitatea $m_p \geq m_g \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab \\ \dfrac{b^2+c^2}{2} \geq bc \\ \dfrac{c^2+a^2}{2} \geq ca \end{cases}$

Adunând membru cu membru inegalitățile de mai sus, obținem

$\dfrac{2a^2+2b^2+2c^2}{2} \geq ab+bc+ca \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

2. a). Demonstrați că $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$, $\forall x>0$

b). Demonstrați că $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geq 2, \forall a,b>0$

Soluție:

a). Cu inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică:

$$x+\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

b). Putem lua $x=\dfrac{a}{b}$ în a). Sau procedăm ca înainte:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$$

3. Să se demonstreze că :

$$\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\frac{\sqrt{20}}{9}+\ldots+\frac{\sqrt{2070}}{91} < \frac{45}{2}$$

Soluție :

Vom folosi inegalitatea mediilor : $\sqrt{a\cdot b}\le\frac{a+b}{2}$.

Deci vom avea :

$$\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3}\le\frac{\frac{1+2}{2}}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{5}=\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5}\le\frac{\frac{2+3}{2}}{5}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{7}=\frac{\sqrt{3\cdot 4}}{7}\le\frac{\frac{3+4}{2}}{7}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2070}}{91}=\frac{\sqrt{45\cdot 46}}{91}\le\frac{\frac{45+46}{2}}{91}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\frac{\sqrt{20}}{9}+\ldots+\frac{\sqrt{2070}}{91}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{20}}{9}+\ldots+\frac{\sqrt{2070}}{91}<\frac{45}{2}$$

4. Arătați că pentru orice numere reale strict pozitive x,y,z, avem

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}$$

Soluție :

În inegalitatea : $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca,$ luăm:

$a=\frac{x}{y},\quad b=\frac{y}{z},\quad c=\frac{z}{x}$ şi obținem: $\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^2\ge\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}+\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}+\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y}$ sau

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}.$$

5. Arătați că pentru orice numere reale a,b,c>0 avem

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$$

Soluție:

Cu inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică,

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}\geq\sqrt{ab}\cdot\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ca}=\sqrt{ab\cdot bc\cdot ca}=\sqrt{a^2b^2c^2}=abc.$$

6. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8\sqrt{2}}+\frac{1}{15\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2010\cdot 2012\sqrt{2010}}\geq\frac{2010\cdot 2013}{2011\cdot 4024}$$

Soluție :

Primul membru al inegalității se mai scrie:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 4\sqrt{2}}+\frac{1}{3\cdot 5\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2010\cdot 2012\sqrt{2010}}$$

$\sqrt{k}=\sqrt{k\cdot 1}\leq\frac{k+1}{2}$, (inegalitatea mediilor) orice k≥1, deci $\frac{1}{\sqrt{k}}\geq\frac{2}{k+1}$, atunci :

$$\frac{1}{k(k+2)\sqrt{k}}\geq\frac{2}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

Pentru k=2, $\frac{1}{2\cdot 4\sqrt{2}}\geq\frac{1}{6}-\frac{1}{12}$

Pentru k=3, $\frac{1}{3\cdot 5\sqrt{3}}\geq\frac{1}{12}-\frac{1}{20}$

....

Pentru k=2010, $\frac{1}{2010\cdot 2012\sqrt{2010}}\geq\frac{1}{2010\cdot 2011}-\frac{1}{2011\cdot 2012}$

Adunând toate aceste inegalități obținem :

$$\frac{1}{2\cdot 4\sqrt{2}}+\frac{1}{3\cdot 5\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2010\cdot 2012\sqrt{2010}}\geq\frac{1}{6}-\frac{1}{2011\cdot 2012}$$

Adunând în ambii membri ai inegalității $\frac{1}{3}$, obținem :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 4\sqrt{2}}+\frac{1}{3\cdot 5\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2010\cdot 2012\sqrt{2010}}\geq\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{2011\cdot 2012}\geq\frac{2011\cdot 2012-2}{2011\cdot 4024}$$

$2011\cdot 2012-2=(2010+1)(2010+2)-2=2010^2+3\cdot 2010+2-2=2010(2010+3)=2010\cdot 2013$ Deci :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 4\sqrt{2}}+\frac{1}{3\cdot 5\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2010\cdot 2012\sqrt{2010}}\geq\frac{2010\cdot 2013}{2011\cdot 4024}.$$

7. Arătați că pentru orice numere reale a,b,c>0 avem:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$$

Soluție:

Prin înmulțirea parantezelor , obținem

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 2+2=4$$

Altfel, din inegalitatea dintre media armonică şi cea aritmetică.

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\frac{a+b}{2}$$

Rezultă imediat că $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$.

8. Dacă a,b,c,d $\in \mathbf{R}_+$ şi a+b+c+d=1005 arătați că :
$\sqrt{a(b+c+d)}+\sqrt{b(c+d+a)}+\sqrt{c(d+a+b)}+\sqrt{d(a+b+c)}\leq 2010$.

Soluție :

a+b+c+d=1005 $\Rightarrow$ b+c+d=1005-a
c+d+a=1005-b
d+a+b=1005-c
a+b+c=1005-d

Avem de arătat că:

$\sqrt{a(1005-a)}+\sqrt{b(1005-b)}+\sqrt{c(1005-c)}+\sqrt{d(1005-d)}\leq 2010$.
Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$$\sqrt{a(1005-a)}\leq\frac{a+1005-a}{2}=\frac{1005}{2}$$

$$\sqrt{b(1005-b)}\leq\frac{b+1005-b}{2}=\frac{1005}{2}$$

$$\sqrt{c(1005-c)}\leq\frac{c+1005-c}{2}=\frac{1005}{2}$$

$$\sqrt{d(1005-d)}\leq\frac{d+1005-d}{2}=\frac{1005}{2}$$

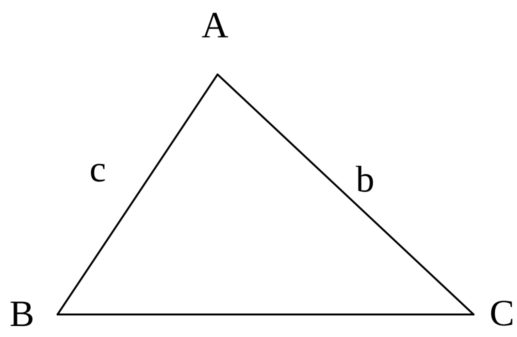
Deci:

$$\sqrt{a(b+c+d)}+\sqrt{b(c+d+a)}+\sqrt{c(d+a+b)}+\sqrt{d(a+b+c)}\leq 2010$$

10. Aplicații ale inegalității mediilor în demonstrarea unor inegalități geometrice

1. Se consideră triunghiul ABC cu AC = b şi AB = c.

Să se arate că $S_{\Delta ABC} \le \left(\frac{b+c}{2\sqrt{2}}\right)^2$.



Soluție :

$S_{\Delta ABC} = \frac{bc \cdot \sin A}{2} \le \frac{bc}{2}$ (1)

Din $m_g \le m_a \Rightarrow bc \le \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{bc}{2} \le \frac{(b+c)^2}{8} = \left(\frac{b+c}{2\sqrt{2}}\right)^2$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow S_{\Delta ABC} \le \left(\frac{b+c}{2\sqrt{2}}\right)^2$.

2. Fie a, b, c măsurile laturilor unui triunghi ABC.
a) Să se determine natura triunghiului ABC, dacă are loc relația: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$
b) Dacă c are valoare constantă, iar expresia $(p-a)(p-b)$ are valoare maximă, să se demonstreze că triunghiul este isoscel. (S-a notat $p = \frac{a+b+c}{2}$ - semiperimetrul triunghiului).

Soluție:

a) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Rightarrow a = b = c$, deci triunghiul este echilateral.
b) $(p-a)(p-b) = \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right) = \frac{1}{4}\left[c^2 - (a-b)^2\right]$ expresia are valoarea maximă dacă şi numai dacă $a = b$, triunghiul este isoscel.

3.
a) Să se demonstreze că dintre toate dreptunghiurile cu acelaşi perimetru, pătratul are aria maximă,
b) Să se demonstreze că dintre toate dreptunghiurile cu aceeaşi arie, pătratul are perimetrul minim,
c) Să se demonstreze că dintre toate paralelipipedele dreptunghice cu lungimea diagonalei constantă, cubul are aria totală maximă,
Fie a lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic, iar S aria sa. Să se demonstreze că dacă $\frac{a}{2} \le \sqrt{S}$, atunci triunghiul este isoscel.

Soluție:

a) Fie a, b lungimile laturilor dreptunghiului şi S aria sa. Avem $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}=$constant.

$S = ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Se obține $S_{\max} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ pentru $a=b$, dreptunghiul este pătrat.

b) $P = 2a + 2b \ge 4\sqrt{ab} = 4\sqrt{S}$ - constant, perimetrul este minim pentru $a=b$, dreptunghiul este pătrat.

c) Fie a, b, c lungimile muchiilor paralelipipedului. Avem $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
$A_t = 2(ab + bc + ca)$. Obținem $A_t \le 2d^2$=constant . $A_{t\max} = 2d^2$. pentru $a=b=c$, paralelipipedul este cub.

d) Fie b, c lungimile catetelor triunghiului. $\frac{a}{2} \le \sqrt{S} \Leftrightarrow a^2 \le 4S \Leftrightarrow b^2 + c^2 \le 2bc \Leftrightarrow$

$(b-c)^2 \le 0$, $b=c$, triunghiul este isoscel.

11. Aplicații ale inegalității mediilor în determinarea maximului sau minimului unei expresii algebrice

1. Numerele $x, y \geq 0$ satisfac relația $x + y = 4$

Să se determine minimul şi maximul expresiei $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, dacă acestea există.

Soluție:

Din $m_h \leq m_a \Rightarrow \dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \dfrac{x+y}{2} = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geq 1$, cu egalitate pentru $x = y = 2$

Rezultă că există minim , şi anume $\min\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1$, dar nu există maxim deoarece suma $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ poate fi oricât de mare, pentru *x* sau *y* foarte mic.

2. Aflați valoarea minimă a expresiei:

$$E(x)=\frac{9x^2+12x+20}{3x+2}, x \in \mathbf{R}_+$$

Soluție:

$$E(x)=\frac{(3x+2)^2+16}{3x+2}=3x+2+\frac{16}{3x+2}$$

Din $m_a \geq m_g \Rightarrow \dfrac{3x+2+\frac{16}{3x+2}}{2} \geq \sqrt{(3x+2)\cdot\dfrac{16}{3x+2}} \Rightarrow 3x+2+\dfrac{16}{3x+2} \geq 8$

Deci $E(x) \geq 8 \Rightarrow \min E(x)=8$.

12. Aplicaţii ale inegalităţii mediilor în fizică

1. Două mobile parcurg acelaşi drum, primul cu viteză constantă v, cel de-al doilea parcurgând 2 porțiuni egale cu vitezele v_1, v_2, a căror medie aritmetică este v. Care mobil parcurge drumul mai repede?

Soluție:

Notăm distanța cu $D=2\cdot d$, iar timpii de parcurgere cu t_1 (pentru primul mobil) şi t_2 (pentru al doilea mobil),

$$t_1 = \frac{D}{v} = \frac{2\cdot d}{\frac{v_1+v_2}{2}} = d\cdot\frac{4}{v_1+v_2} \quad , \quad t_2 = \frac{d}{v_1}+\frac{d}{v_2} = d\cdot\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)$$

Aplicăm inegalitatea $m_h \le m_a$ pentru v_1 şi v_2 şi obținem:

$$\frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}} \le \frac{v_1+v_2}{2}$$

$$\frac{4}{v_1+v_2} \le \frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2} \Rightarrow d\cdot\frac{4}{v_1+v_2} \le d\cdot\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right) \Rightarrow t_1 \le t_2$$

În concluzie, mobilul care merge cu viteză constantă ajunge la destinație în cel mai scurt timp.

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

[1]. **M. Becheanu , B. Enescu – Inegalități elementare… şi mai puțin elementare , Editura Gil.**

[2]. **Buşneag D. , Leonte A., Vladimirescu, I. – Culegere de probleme pentru admiterea în învățământul superior şi perfecționarea profesorilor de matematică din învățământul preuniversitar, Editura Sitech, Craiova, 1993.**

[3]. Cristescu Gh. Dăneț, R - Matematică - aritmetică şi algebră; manual opțional pentru clasele V-VIII.

[4]. Probleme de matematică traduse din revista KVANT – Bucureşti, 1983 ;

[5]. Colecția Gazeta Matematică - 1971-2005.