



Monica Stanciu

**Geometria elementelor remarcabile
în triunghi**

ISBN 978-606-671-936-0

Editura Sfântul Ierarh Nicolae

2014

**UNIVERSITATEA BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ**

**LUCRARE
PENTRU OBTINEREA
GRADULUI DIDACTIC I**

2002

**UNIVERSITATEA BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ**

**GEOMETRIA ELEMENTELOR
REMARCABILE ÎN TRIUNGHI**

**COORDONATOR ȘTIINȚIFIC
LECTOR DR. NICOLAE SOARE**

PROFESOR MONICA STANCIU

**BUCUREȘTI
2002**

CUPRINS

INTRODUCERE	pag. 3
CAPITOLUL I TRIUNGHIURI	pag. 4
1.1. Sistemul axiomatic al lui Euclid, Hilbert și Birkoff - considerații generale	pag. 4
1.2. Notății. Definiții. Proprietăți. Teoreme.	pag. 5
1.3. Diviziune armonică	pag. 8
1.4. Triunghiuri	pag. 10
1.5. Linii importante într-un triunghi și concurența lor	pag. 12
1.6. Triunghiul ortic	pag. 14
1.7. Centrele cercurilor exînscrie	pag. 15
1.8. Aplicații	pag. 16
CAPITOLUL II DREPTE REMARCABILE	pag. 21
2.1. Transversale	pag. 21
2.2. Dreapta lui Lemoine	pag. 24
2.3. Dreapta lui Gauss	pag. 24
2.4. Dreapta lui Aubert	pag. 25
2.5. Dreapta antiortică	pag. 25
2.6. Axa de omologie	pag. 26
2.7. Relația lui Euler	pag. 27
2.8. Dreapta lui Euler	pag. 28
2.9. Cercul medial sau Cercul lui Euler	pag. 28
2.10. Dreapta lui Simson	pag. 31
2.11. Triunghiuri S. Proprietăți remarcabile	pag. 33
2.12. Teorema lui Lalescu	pag. 35
2.13. Drepte izogonale	pag. 35
2.14. Simediana	pag. 36
2.15. Aplicații	pag. 38
CAPITOLUL III PUNCTE REMARCABILE	pag. 41
3.1. Puncte izogonale. Proprietăți	pag. 41
3.2. Punctul lui Lemoine	pag. 41
3.3. Teorema lui Feuerbach	pag. 43
3.4. Punctul lui Kariya	pag. 45
3.5. Punctul lui Vecten	pag. 45
3.6. Teorema lui Steiner	pag. 46
3.7. Teorema izogonalelor	pag. 46
3.8. Teoremele lui Naghel	pag. 48
3.9. Punctul lui Nagel	pag. 49
3.10. Punctul lui Gergonne	pag. 50
3.11. Teorema lui Neuberg	pag. 50
3.12. Triunghiul podar	pag. 51
3.13. Teoremele lui Grebe	pag. 52
3.14. Punctul lui Torricelli	pag. 54
3.15. Puncte importante în triunghi regăsite din proprietatea de minim	pag. 56
3.16. Punctele lui Brocard	pag. 60
3.17. Aplicații	pag. 62

CAPITOLUL IV	CERCURI REMARCABILE	pag. 67
4.1.	Cercurile lui Appoloni	pag. 67
4.2.	Cercurile lui Tucker	pag. 69
4.3.	Cercurile lui Lemoine	pag. 70
4.4.	Teorema lui Schömilch	pag. 70
4.5.	Cercurile lui Taylor	pag. 72
4.6.	Triunghiul și cercul lui Brocard. Proprietăți	pag. 73
4.7.	Cercurile lui Neuberg	pag. 75
4.8.	Teorema lui Țițeica	pag. 76
4.9.	Aplicații	pag. 77
CAPITOLUL V	PAGINI DIN ISTORIA MATEMATICII	pag. 82
5.1.	Geometria elementară	pag. 82
5.2.	Scurt raid în istoria matematicii românești	pag. 84
5.3.	Contribuția matematicienilor români la dezvoltarea geometriei	pag. 85
	5.3.1. Traian Lalescu	pag. 85
	5.3.2. Simion Stoilov	pag. 87
	5.3.3. Gheorghe Țițeica	pag. 88
	5.3.4. Dimitrie Pompeiu	pag. 90
	5.3.5. Dan Barbilian	pag. 90
	5.3.6. Ion Ionescu	pag. 92
5.4.	Euler și geometria	pag. 92
5.5.	Notițe bibliografice selectiv din viața și opera matematicienilor renumiți	pag. 96
	5.5.1. Apoloni din Perga	pag. 96
	5.5.2. Pitagora	pag. 97
	5.5.3. Torricelli Evanghelist	pag. 98
	5.5.4. Joseph Gergonne	pag. 99
	5.5.5. Henri Brocard	pag. 100
	5.5.6. Emil Lemoine	pag. 100
	5.5.7. Simone L'Huilier	pag. 100
	5.5.8. Lazare Carnot	pag. 101
	5.5.9. Karl Feuerbach	pag. 102
	5.5.10. Ernest Grobe	pag. 103
	5.5.11. Giovanni Ceva	pag. 103
	5.5.12. Menelau	pag. 103
	5.5.13. Jacob Steiner	pag. 104
CAPITOLUL VI	METODOLOGIA PROIECTĂRII OPȚIONALELOR	pag. 106
6.1.	Repere pentru proiectarea opționalelor	pag. 106
6.2.	Programe pentru opționalele „Pagini din istoria matematicii” și „Geometria triunghiului”	pag. 107
6.3.	Aspecte privind predarea Curriculum-ului la dispoziția școlii la clasă	pag. 110
6.4.	Didactica opționalului	pag. 121

BIBLIOGRAFIE

INTRODUCERE

Tema lucrării se înscrie într-unul dintre domeniile de interes major ale matematicii școlare și ale concursurilor școlare, deoarece noile noțiuni sunt generalizări naturale ale celor predate conform Curriculumului național, constituindu-se într-un indicator informativ-formativ achiziționat în anii de studiu al geometriei plane. Conceput cu scopul de a dezvolta la nivel superior cultura matematică a elevilor și de a le perfecționa latura operațională a gândirii, cursul opțional de geometria elementelor remarcabile în triunghi aprofundează relațiile existente între clasele de poligoane și proprietățile cercului.

Lărgirea orizontului de cunoștințe matematice este atinsă însă, mai ales, prin obiectivele specifice laturii informative, legate de:

- noi clase de linii importante în triunghi;
- relații metrice noi în geometria triunghiului;
- clase noi de triunghiuri și proprietățile lor;
- folosirea unor diverse strategii și metode de rezolvare a problemelor de geometrie: aplicarea directă a rezultatelor teoretice calitative sau cantitative.

Lucrarea de față cuprinde o seamă de elemente teoretice, necesare, în opinia noastră, a fi puse și mai bine în lumină, dată fiind importanța lor în rezolvarea problemelor. Astfel, primul demers teoretic se circumscrie problematicii triunghiului și liniilor sale importante. În continuare, sunt prezentate dreptele remarcabile ale lui Euler și Simson și câteva condiții de coliniaritate a punctelor și de concurență a dreptelor, cristalizate în teoreme celebre ale geometriei plane, prin parcurgerea cărora urmărim familiarizarea elevului atât cu folosirea relațiilor metrice în geometrie, cât și cu un nivel superior al construcțiilor geometrice. Așadar, putem spune că lucrarea este un instrument auxiliar în formarea unei gândiri corecte și clare, prin intermediul raționamentului abstract și al imaginii concrete. Am considerat potrivită și includerea unui breviar de cunoștințe din istoria matematicii, în principal pentru a ajuta elevii să-și formeze temeinic bazele gândirii științifice. La final, lucrarea mai conține câteva considerații de metodologie și didactică

De fapt, paginile care urmează cuprind rodul strădaniei de a pune la îndemâna elevilor și a celor interesați de matematică nu numai un pachet de informații noi, ci și exerciții care să-i atragă în mod plăcut la lucru, și, totodată, câteva elemente de istoria matematicii, menite să trezească pasiunea pentru cercetare în matematică.

Geometria elementelor remarcabile în triunghi constituie o lucrare de bază pentru cei ce vor să se inițieze în frumusețile cu totul particulare ale acestei părți a geometriei.

Capitolele lucrării constituie o introducere în lumea minunată a punctelor și dreptelor celebre, a geometriei triunghiului.

Pe lângă teoreme și probleme clasice de geometrie plană, în lucrare sunt puse în evidență contribuții importante ale unor matematicieni români (Gheorghe Țițeica, Dimitrie Pompeiu, Traian Lalescu, etc.) la dezvoltarea geometriei.

Lucrarea poate fi folosită în pregătirea elevilor din gimnaziu sau liceu, este deopotrivă utilă profesorilor de matematică din învățământul gimnazial și liceal, atât din punct de vedere științific cât și metodologic, putând fi utilizată ca suport de curs a unor discipline opționale.

CAPITOLUL I

TRIUNGHIURI

1. 1. Sistemele axiomatiche ale lui Euclid, Hilbert și Birkhoff – considerații generale

Se știe că “Elemente”-le lui Euclid constituie prima încercare de axiomatizare a unei teorii matematice, și anume geometria. Ideea fundamentală a lui Euclid a fost aceea că toate proprietățile geometriei (cunoscute pe vremea lui) pot fi obținute pe cale logico-deductivă numai din câteva noțiuni și propoziții (postulate) inițiale. Aceasta este în esență metoda axiomatică. Dovada posibilității înfăptuirii programului lui Euler o constituie “Elemente”-le. Această carte a avut o influență covârșitoare asupra dezvoltării întregii matematici. Trebuie să remarcăm însă că sistemul axiomatic al lui Euclid, al geometriei, nu este un sistem axiomatic semiformalizat, el este un sistem axiomatic intuitiv (sau material) deoarece noțiunile și relațiile lui primare au un conținut intuitiv, iar axiomele sunt propoziții “evidente” unele verificabile experimental.

Analize critice ulterioare ale “Elemente”-lor au scos la iveală o serie de deficiențe ale acestora. Au urmat construcțiile altor matematicieni. Geometria se edifică drept teoria semiformalizată care acoperă întreg cuprinsul “Elemente”-lor lui Euclid. Cunoaștem că o astfel de construcție a geometriei a fost făcută de David Hilbert în cartea sa “Grundlagen der Geometrie”.

Construcția axiomatică a geometriei realizată de Hilbert are avantaje importante și anume:

- elimină definitiv intuiția;
- nu folosește elemente exterioare geometriei;
- axiomele sunt grupate în mod natural;
- teoria este prezentată gradat și sistematic;
- surprinde partea comună a geometriilor euclidiană și hiperbolică;
- satisface condițiile de metateorie, necontradicție, minimalitate, completitudine.

Sistemul axiomatic al lui Hilbert este un sistem semiformalizat. În formularea dată axiomelor Hilbert evită complet teoria mulțimilor imprimând sistemului un conținut avantajos din punct de vedere științific. Noțiunile primare sunt: punctul, dreapta și planul.

Punctele vor fi notate cu majuscule latine A, B, C, ... iar mulțimea tuturor punctelor cu E. Dreptele vor fi notate cu literele mici ale alfabetului latin a, b, c, ... iar mulțimea tuturor dreptelor cu D. Planele vor fi notate cu litere grecești $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ iar mulțimea tuturor planurilor cu P.

Relațiile primare folosite sunt în număr de cinci:

- “ \in ” incidență, apartenență;
- “ \notin ” neapartenență;
- “ $-$ ” între A-B-C (B este între A și C);
- “ \equiv ” congruența $(AB) \equiv (CD)$ și $\angle h'Ok \equiv \angle h'Ok'$;
- “ \neq ” necongruență.

Axiomele sistemului axiomatic al lui Hilbert sunt împărțite în 5 grupe:

- | | |
|-----------|-----------------------------|
| Grupa I | - axiomele de incidență; |
| Grupa II | - axiomele de ordine; |
| Grupa III | - axiomele de congruență; |
| Grupa IV | - axiomele de continuitate; |
| Grupa V | - axioma paralelelor. |

Teoria axiomatică construită cu sistemul axiomatic Hilbert se numește geometrie euclidiană, iar structura matematică se numește spațiu euclidian.

Sistemul axiomatic Birkhoff fiind semiformalizat va include și logica uzuală cunoscută. Relații primesc: punctul, dreapta, planul, distanța și măsura unghiurilor.

Noțiunile și relațiile primare din sistemul axiomatic Hilbert sunt noțiuni și relații primare sau derivate, din sistemul axiomatic Birkhoff și reciproc, iar axiomele din sistemul axiomatic Hilbert sunt axiome în sistemul de axiome Birkhoff și reciproc.

Deci cele două sisteme axiomatice sunt echivalente.

Avantajele sistemului axiomatic Birkhoff sunt:

- are axiome mai puține decât sistemul axiomatic Hilbert;
- mulțimea \mathfrak{R} intervine în sistemul axiomatic;
- axioma riglei și axioma lui Pasch reduc proprietățile de ordine a dreptei la proprietățile de ordine ale lui \mathfrak{R} .

1.2. Notății. Definiții. Proprietăți. Teoreme.

Notății:

Puncte: A, B, C, ...

Drepte: a, b, c, ...

Segmentul deschis: (AB)

Segmentul închis: [AB]

Semidreapta deschisă: (AB

Semidreapta închisă: [AB

Distanța de la A la B; lungimea segmentului (AB): AB

Planul determinat de o dreaptă d și de un punct A nesituat pe d: (dA) sau (Ad)

Semiplan deschis: (dA

Semiplan închis: [dA

Plane: α , β , γ , ...

Planul determinat de trei puncte necoliniare: (ABC)

Congruență: \equiv

Asemenea: \sim

Correspondență: \rightarrow

Măsura unghiului: $m(\sphericalangle AOB)$

Măsura unui segment: |AB|. Avem $|AB| = |BA|$

Proiecția, perpendiculara coborâtă din A pe dreapta BC: $pr_{BC} A$

Triunghi: Δ

Aria triunghiului ABC: $\sigma(ABC)$

Definiții, proprietăți, teoreme

Definiție. Dacă A, B, C sunt trei puncte necoliniare, se numește triunghiul ABC, notat ΔABC , mulțimea de puncte $\Delta ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$

Punctele A, B, C se numesc vârfurile triunghiului ABC, segmentele [AB], [BC], [CA] – laturile triunghiului ABC, iar planul (ABC) – planul triunghiului ABC.

Axioma lui Pascal. Fie dat un triunghi ΔABC și a o dreaptă din planul său (ABC) care nu trece prin nici unul din vârfurile A, B, C ale ΔABC ; dacă dreapta a intersectează o latură a ΔABC (în interior), atunci dreapta a intersectează încă una și numai una din laturile ΔABC (în interior).

Definiție. Două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ se numesc congruente dacă există o corespondență între vârfuri, de exemplu $(A, B, C) \rightarrow (A', B', C')$ astfel încât unghiurile corespunzătoare sunt congruente $\hat{A} \equiv \hat{A}'$; $\hat{B} \equiv \hat{B}'$; $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ și laturile determinate de vârfurile corespunzătoare (numite laturi corespunzătoare) sunt congruente, deci $(AB) \equiv (A'B')$; $(BC) \equiv (B'C')$; $(AC) \equiv (A'C')$.

Vom nota în acest caz $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

Teoremele (cazurile) de congruență ale triunghiurilor dau condiții suficiente (și evident necesare) ca două triunghiuri să fie congruente.

Teoremă (Cazul I de congruență a triunghiurilor)

Dacă ABC și $A'B'C'$ sunt două triunghiuri pentru care au loc relațiile:

$(AB) \equiv (A'B')$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $(AC) \equiv (A'C')$ atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

Teoremă (Cazul II de congruență a triunghiurilor)

Dacă ABC și $A'B'C'$ sunt două triunghiuri pentru care au loc relațiile:

$\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $(BC) \equiv (B'C')$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

Teoremă (Cazul III de congruență a triunghiurilor)

Dacă ABC și $A'B'C'$ sunt două triunghiuri pentru care au loc relațiile:

$(AB) \equiv (A'B')$, $(BC) \equiv (B'C')$, $(CA) \equiv (C'A')$ atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

Teoremă (Cazul IV de congruență a triunghiurilor)

Dacă ABC și $A'B'C'$ sunt două triunghiuri pentru care au loc relațiile:

$(AB) \equiv (A'B')$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

Propoziție. Suplementele a două unghiuri congruente, sunt congruente. În particular, unghiurile opuse la vârf sunt congruente.

Definiție Se numește unghi drept, un unghi congruent cu suplementul său.

Teoremă. Există un unghi drept. Toate unghiurile drepte sunt congruente între ele.

Definiție. Fie $\sphericalangle AOB$ un unghi propriu cu laturile (OA) , (OB) .

Se numesc unghiuri adiacente, două unghiuri proprii care au același vârf, o latură comună și interioarele disjuncte.

Două unghiuri adiacente care au laturile necomune opuse se numesc suplementare.

Două unghiuri care au același vârf și laturile câte două opuse, se numesc unghiuri opuse la vârf.

Într-un triunghi $\triangle ABC$, unghiurile suplementare unghiurilor triunghiului se numesc unghiuri exterioare ale $\triangle ABC$.

Definiție. Trei sau mai multe puncte se numesc coliniare dacă există o dreaptă care le conține.

Definiție. Fie $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$. Dacă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ se spune că există o asemănare între $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$ și se scrie $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Teorema fundamentală a asemănării

Fie $\triangle ABC$ și $DE \parallel BC$, $A \neq D$, $D \in AB$, $E \in AC$. Atunci $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Teorema. Fie triunghiurile $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$:

1. Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

2. Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ și $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

3. Dacă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Definiție. Un poligon care poate fi înscris într-un cerc se numește poligon înscritibil.

Teoremă

1. Într-un patrulater înscritibil unghiul format de o latură cu o diagonală este egal cu unghiul format de latura opusă cu cealaltă diagonală și reciproc.

2. Într-un patrulater înscritibil suma măsurilor unghiurilor opuse este de 180° .

Teoremă

Fie $\mathcal{C}(O, r)$ și $M \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$. Atunci pentru orice coardă AB care conține punctul M produsul $AM \cdot BM = \text{constant}$.

Puterea punctului M față de cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se notează $\rho(M)$

$\rho(M) = OM^2 - r^2$ dacă $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$

$\rho(M) = r^2 - OM^2$ dacă $M \in \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$

$$\rho(M)=0 \quad \text{dacă } M \in \mathcal{C}(O, r)$$

Semnificația intuitivă a noțiunii de figuri geometrice care au aceeași orientare este aceea de parcurgere a conținuturilor acestor figuri în același sens, de exemplu în sensul mișcării acelor ceasornicului. În plan, congruența figurilor este de două tipuri: congruență între figuri care au aceeași orientare și congruență între figuri care au orientări diferite.

Definiție. Un triunghi orientat ABC este un triplet ordonat de puncte necoliniare A, B, C deci un triunghi în care se precizează care este primul vârf, care este al doilea vârf și care este al treilea vârf al triunghiului.

Sensul în care se parcurge conturul unui triunghi orientat ABC este dat de ordinea în care sunt scrise vârfurile lui.

Definiție. Punctele A și A' din planul π se numesc simetrice în raport cu punctul O din planul π dacă O este mijlocul segmentului $[AA']$.

Punctul A' se numește simetricul punctului A în raport cu punctul O .

Simetria centrală de centru O în planul π este o transformare a planului π prin care punctul O se transformă în el însuși și orice alt punct A se transformă în simetricul său A' în raport cu punctul O .

Definiție. Punctele A și A' din planul π se numesc simetrice în raport cu dreapta d din planul π dacă segmentul $[AA']$ este perpendicular pe dreapta d și o intersectează într-un punct O , astfel încât $[AO] \equiv [OA']$. Punctul A' se numește simetricul punctului A în raport cu dreapta d .

Definiție. Omotetia de centru $O \in \pi$ și raport $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ este o transformare a planului π prin care fiecărui punct X i se asociază punctul X' astfel încât $OX' = kOX$.

Definiție. Dacă X este un punct oarecare din planul π și $h_O^k(X)$ o omotetie a planului π , atunci punctul $h_O^k(X)$ se numește omoteticul lui X în omotetia de centru O în raport cu k , iar dacă $F \subset \pi$ este o figură geometrică din planul π , atunci figura $F' = h_O^k(F)$ se numește omotetica figurii F în omotetia de centru O și raport R .

Corolar. Figurile geometrice omotetice sunt asemenea.

Toate dreptele care trec prin O și numai ele sunt invariante în raport cu omotetia h_O^k .

Teoremă. Într-un triunghi, un unghi exterior este mai mare decât fiecare din unghiurile neadiacente lui.

Demonstrație I (Figura 1.1)

Fie $\triangle ABC$ și $\triangle CAM$ un unghi exterior,

$$m(\angle CAM) > m(\angle ACB).$$

Fie $D \in (AC)$ astfel încât $AD \equiv DC$. Fie

$E \in (BD)$ astfel încât $DB \equiv DE$. Deoarece

$$E \in \text{Int}(\angle CAM) \Rightarrow \angle CAE < \angle CAM,$$

$$\triangle DAE \equiv \triangle DCB \text{ (L.U.L.)}, \text{ deci } \angle ACB)$$

$$\equiv m(\angle DAE) < m(\angle CAM). \text{ Pentru a arăta}$$

că $m(\angle CAM) > m(\angle ABC)$ se face un raționament analog, folosind însă compararea cu celălalt unghi exterior cu vârful în A .

Demonstrația II (Figura 1.2)

Fie $\hat{B}_{\text{ext}} > \hat{A}$ reducând la absurd celelalte

două cazuri $\hat{B}_{\text{ext}} \equiv \hat{A}$ și $\hat{B}_{\text{ext}} < \hat{A}$.

Cazul 1. Fie $D \in (BC)$ astfel încât $(AC) \equiv (BD)$

$$\Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle BAD \text{ (L.U.L.)} \Rightarrow \hat{B} \equiv \angle BAD \text{ și}$$

din $\hat{B}_{\text{ext}} \equiv \hat{A} \Rightarrow \hat{B} \equiv \angle BAC'$ rezultă contradicție.

Figura 1.2

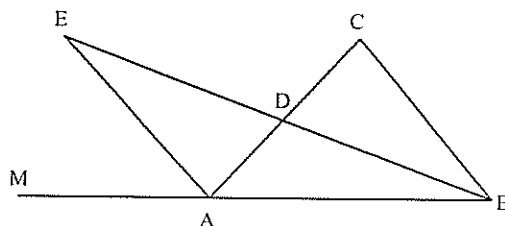
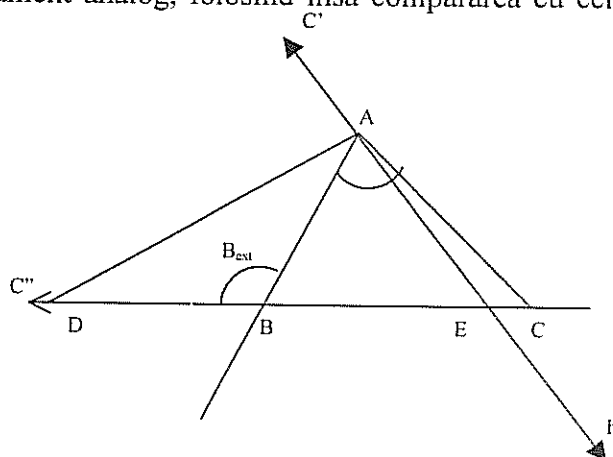


Figura 1.1



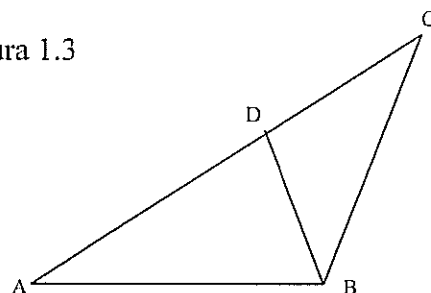
Dacă $\hat{B}_{ext} < \hat{A}$ atunci există o semidreaptă h cu originea în A și exterioară unghiului \hat{A} astfel încât $\hat{B}_{ext} \equiv \angle((AB, h))$. Dacă $h \cap (BC) = \{E\}$ atunci pentru \hat{B}_{ext} și $\triangle ABE$ suntem în cazul precedent.

Corolar. $\hat{B}_{ext} = \hat{A} + \hat{C}$

Corolar. Într-un triunghi cu două laturi necongruente, laturii cu lungimea mai mare i se opune unghiul mai mare și reciproc.

Demonstrație În $\triangle ABC$ cu $AC > AB$, (Figura 1.3), se consideră $D \in (AC)$ astfel încât $(AD) \equiv (AB)$. Atunci $\triangle ABD$ este triunghi isoscel și $\angle ABD \equiv \angle ADB > \angle ACB$, $\angle ADB$ fiind unghi exterior $\triangle BDC$. Pentru ca $D \in (AC)$, $(BD) \subset \text{Int} \angle ABC$, deci $\angle ABC > \angle ABD > \angle ACB$

Figura 1.3

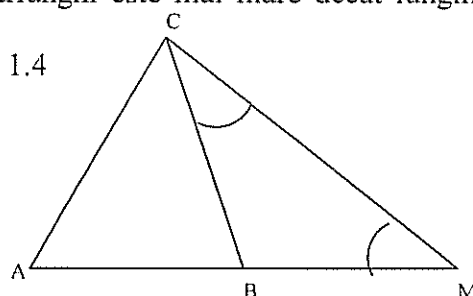


Reciproc – prin reducere la absurd.

Teoremă Suma lungimilor a două laturi ale unui triunghi este mai mare decât lungimea celei de a treia laturi.

Demonstrație. Fie ABC un triunghi (Figura 1.4). Să demonstrăm că $AB + BC > AC$. Fie $M \in (AB)$, astfel încât $B \in (AM)$ și $(BC) \equiv (BM)$. Inegalitatea care trebuie demonstrată revine la: $AB + BM = AM > AC$. Pentru a demonstra că $AM > AC$ este suficient să demonstrăm că $m(\angle ACM) > m(\angle AMC)$.

Figura 1.4



Prin construcție, $\triangle CBM$ este isoscel deci $\angle AMC \equiv \angle BCM$. Deoarece $B \in \text{Int} \angle ACM$, rezultă $m(\angle ACM) > m(\angle BCM) = m(\angle AMC)$.

Definiție. Se numește triunghi dreptunghic triunghiul cu un unghi drept.

Teoremă. Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$ cu $\hat{A} \equiv \hat{A}' = 90^\circ$:

- Dacă $(AB) \equiv (A'B')$ și $(AC) \equiv (A'C')$ atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (cazul C.C.);
- Dacă $(AB) \equiv (A'B')$ și $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (cazul C.U.);
- Dacă $(BC) \equiv (B'C')$ și $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (cazul I.U.);
- Dacă $(AB \equiv A'B')$ și $(BC) \equiv (B'C')$ atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (cazul C.I.).

Definiții.

Mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe segment dusă prin mijlocul segmentului.

Perpendiculara prin vârful unui triunghi pe dreapta determinată de latura opusă se numește înălțime.

Dreapta determinată de vârful unui triunghi și mijlocul laturii opuse se numește mediană.

1.3. Diviziune armonică

Se zice că un punct M împarte un segment dat $[AB]$. într-un raport λ dacă avem $|MA|/|MB| = \lambda$

Luând pe dreapta AB o origine O , o unitate de măsură și ca sens direct sensul lui AB , apelând la geometria analitică, abscisele punctelor A , M și B să fie a , x , b (figura 1.5), atunci $\lambda = (x-a)/(x-b)$ a cărui grafic este dat în figura 1.6. Se vede acum clar că raportul λ ia orice valoare pozitiv sau negativă o singură dată, valorile pozitive fiind luate în afara intervalului AB (valoarea 1 la infinit) iar cele negative în interiorul acestui interval.

Fiind dat un punct C care împarte un segment $[AB]$ în raportul λ (pozitiv, negativ sau nul) este important punctul D care împarte același segment în raportul $-\lambda$ (figura 1.7), deci avem

$|CA|/|CB| = -|DA|/|DB|$, relație care se mai poate scrie $2/AB = 1/AC + 1/AD$, de unde rezultă că segmentul $[AB]$ este medie armonică între segmentele $[AC]$ și $[AD]$.

Se zice că punctul C este conjugat armonic cu punctul D , față de punctele A și B . În mod evident punctul C este conjugat armonic cu punctul D față de aceleași puncte. Se mai spune că A, B sunt conjugate armonic cu C și D , sau că perechile de puncte A, B și C, D sunt conjugate armonic, sau în fine că punctele A, B, C, D formează o diviziune armonică. Orice punct de pe dreapta AB are un conjugat armonic, cu excepția mijlocului segmentului $[AB]$. Când un segment $[AB]$ împarte armonic un segment $[CD]$, atunci unul dintre punctele C și D este interior iar celălalt exterior segmentului $[AB]$, prin urmare segmentele $[AB]$ și $[CD]$ se suprapun parțial.

Dacă însă două segmente $[CD]$ și $[C'D']$ împart armonic segmentul $[AB]$, atunci fie că unul dintre ele este complet cuprins în celălalt, fie că ele nu au nici un punct comun.

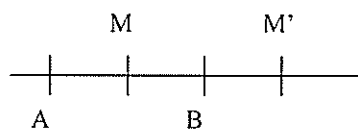


Figura 1.5

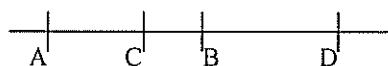
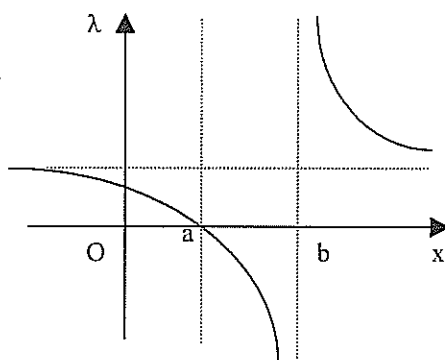


Figura 1.7

Figura 1.6



Raport anarmonic

Pentru patru puncte A, B, C, D , situate pe o dreaptă, se numește raport anarmonic sau biraport, expresia $(ABCD) = \frac{|CA|}{|CB|} : \frac{|DA|}{|DB|}$

Permutând între ele cele patru puncte obținem $4! = 24$ rapoarte, dintre care numai 6 sunt distincte. Notând unul cu r , acestea sunt $r, 1/r, 1-r, 1/(1-r), r/(r-1), (r-1)/r$

În cazul când cele patru puncte formează o diviziune armonică raportul anarmonic este -1 .

Raportul anarmonic al punctelor de intersecție al unei transversale cu patru drepte ce trec prin același punct, este independent de transversală, de aceea el este numit raport anarmonic al fascicolului celor patru drepte (Figura 1.8)

În particular, dacă punctele A, B, C, D formează o diviziune armonică, atunci unindu-le cu un punct O oarecare, vom obține un fascicol armonic, care împarte armonic orice altă dreaptă, care nu trece prin O . O condiție necesară și suficientă pentru ca un fascicol să fie armonic este ca o paralelă la una din dreptele fascicolului (razele fascicolului) să fie împărțită în două părți egale de celelalte drepte. Ca exemplu : bisectoarele unui unghi și laturile unghiului formează un fascicol armonic.

Rezultă din cele de mai sus teorema: locul geometric al conjugatului armonic al unui punct D , prin raport cu punctele de intersecție cu două drepte fixe OA și OB , ale unei secante oarecare ce trece prin punctul D este o dreaptă OC , așa ca dreptele OA, OB, OC și OD să formeze un fascicol armonic (Figura 1.8). Dreapta OC se numește polara punctului D față de dreptele OA și OB , iar punctul D este polul dreptei OC față de dreptele OA și OB .

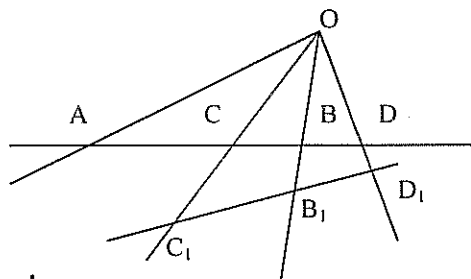


Figura 1.8

1.4 Triunghiuri

În cazul când un triunghi are două laturi egale el se numește isoscel (a treia latură se numește uneori bază), iar dacă are toate laturile egale se numește echilateral. Suma unghiurilor unui triunghi este egală cu 180° . Într-un triunghi isoscel unghiurile care se opun laturilor egale sunt egale. Într-un triunghi echilateral toate unghiurile sunt egale cu 60° . În orice triunghi laturii celei mai mari îi corespunde unghiul cel mai mare. De asemenea dacă laturile unui triunghi sunt a, b și c avem:

$a-b \leq c \leq a+b$, ($a \geq b$) deci o latură este mai mare sau egală decât diferența celorlalte și mai mică sau egală decât suma celorlalte două. Rezultă de aici că un segment de dreaptă este mai scurt decât orice linie frântă, având aceleași extremități.

Într-un triunghi oarecare se pot duce următoarele drepte importante: (Figura 1.9)

- Bisectoarea AD a unghiului A;
- Mediana AE dusă din vârful A;
- Înălțimea AF dusă din vârful A;
- Mediatoarea EG a laturii BC (perpendiculara ridicată pe mijlocul laturii); Punctele D, E, F se numesc picioarele bisectoarei, medianei și înălțimii unghiului A.
- Simediana AH (simetrica medianei față de bisectoarea interioară)

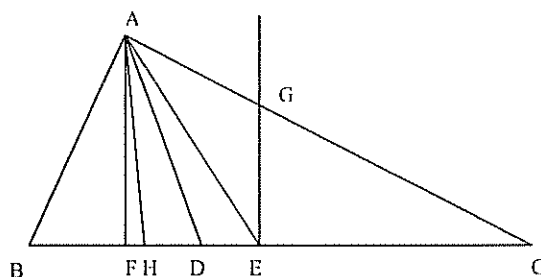


Figura 1.9

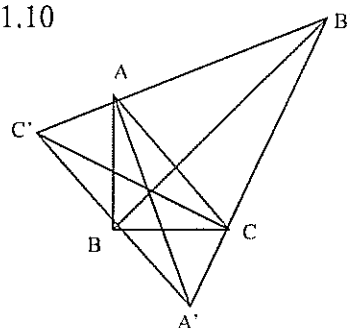
Dreptele izogonale sunt două drepte care trec prin vârful unghiului unui triunghi și sunt simetrice față de bisectoarea unghiului. Astfel simediana este izogonală cu mediana corespunzător aceluiași vârf.

Într-un triunghi dreptunghic mediana unghiului drept este jumătate din ipotenuză. Se definesc de asemenea bisectoarele unghiurilor exterioare ale unui triunghi.

Bisectoarea interioară a unui unghi și bisectoarele exterioare ale celorlalte două unghiuri sunt concurente (Figura 1.10).

Se observă că în triunghiul $A'B'C'$ format cu bisectoarele exterioare ale unghiului unui triunghi ABC, înălțimile sunt bisectoare interioare ale triunghiului ABC.

Figura 1.10



Lungimile unor segmente importante dintr-un triunghi.

Din epoca antichității, formula lui Heron pentru determinarea ariei unui triunghi cu ajutorul laturilor lui a, b, c : $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ este denumită, eronat, cu numele lui Heron (sec. I î.e.n.); ea ne-a fost transmisă prin lucrările acestuia, dându-i o altă demonstrație, dar descoperitorul ei este Arhimede care a publicat-o în lucrarea "Kyklou metrisis". Acest fapt a fost semnalat de M. Abul-Vafa și M. al-Biruni (sec. X), ceea ce a fost cunoscut prima oară în 1910.

Forma actuală a acestei formule a fost dată de I. Newton în "Arithmetica universalis" (1707).

Notând semiperimetrul unui triunghi ABC cu $p=(a+b+c)/2$ avem (Figura 1.11):

înălțimea $AH = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ de unde se obține formula lui Heron pentru aria S a triunghiului ABC , $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, mediana $AD = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2}}$, bisectoarea interioară a unghiului A , $AE = \sqrt{bc \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}} = \sqrt{\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}}$, bisectoarea exterioară a unghiului A , $AF = \sqrt{bc \frac{a^2 - (c-b)^2}{(c-b)^2}}$, raza cercului circumscris, raza cercului înscris ale unui triunghi ABC , $R = \frac{bc}{2AH} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{abc}{4S}$, $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{S}{p}$, unde AH este

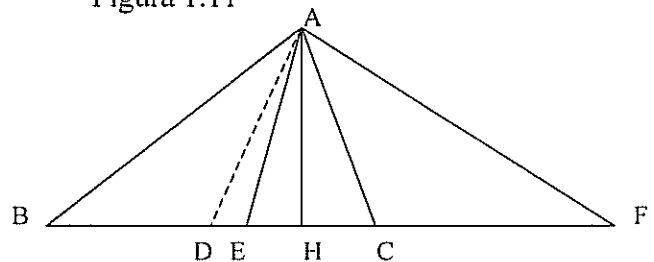
înălțimea corespunzătoare vârfului A din triunghiul ABC , raza cercului exînscriș triunghiului ABC și situat în interiorul unghiului A , Figura 1.11

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} = \frac{S}{p-a}. \text{ Analog, avem}$$

celelalte două raze ale cercurilor exînscrișe:

$$r_b = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}} = \frac{S}{p-b},$$

$$r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}} = \frac{S}{p-c} \text{ Avem formula: } S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

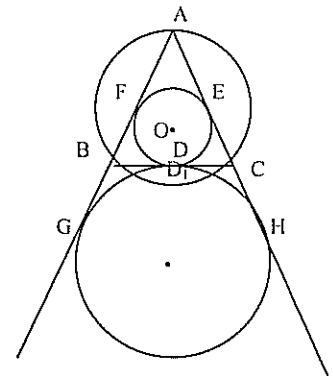


Lungimile segmentelor determinate pe laturile unui triunghi ABC de cercul înscris și pe cercul exînscriș în interiorul unghiului A sunt:

$AE=AF=p-a$; $BF=BD=p-b$; $CD=CE=p-c$ respectiv $AG=AH=p$; $BG=BD_1=p-c$;

$CD_1=CH=p-b$ unde D, E și F sunt punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile BC , CA și AB , iar G, D și H sunt punctele de tangență ale cercului exînscriș din interiorul unghiului A , cu dreptele AB , BC , și AC

Figura 1.12



Aria triunghiului

Aria unui triunghi este egală cu produsul dintre una din laturi (numită bază) cu jumătate din înălțimea corespunzătoare acestei laturi.

Rezultă:

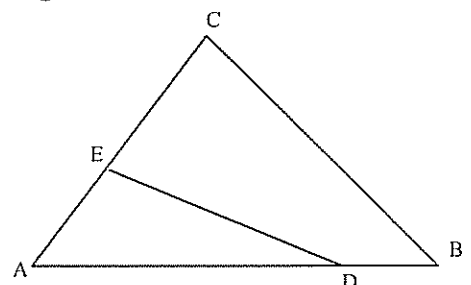
- două triunghiuri care au aceeași bază și aceeași înălțime sunt echivalente, deci dacă se deplasează un vârf a unui triunghi pe o paralelă la latura opusă se obține un triunghi echivalent cu cel inițial;
- ariile a două triunghiuri care au aceeași bază sunt proporționale cu înălțimile lor;
- ariile a două triunghiuri care au aceeași înălțime sunt proporționale cu bazele lor;
- aria unui triunghi se exprimă în funcție de laturile a, b, c cu formula lui Heron

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ unde $2p = a+b+c$. Înlocuind perimetrul găsim $16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4$.

Dacă r este raza cercului înscris în triunghi, aria triunghiului este dată de $S = pr$, dacă r_a este raza cercului exînscriș din interiorul unghiului A , avem $S = (p-a)r_a$ iar dacă R raza

cercului circumscris triunghiului avem $S = \frac{abc}{4R}$ și $S = \sqrt{r r_a r_b r_c}$.

Figura 1.13



Ariile a două triunghiuri care au un unghi egal sau suplementar sunt proporționale cu produsele laturilor care mărginesc acele unghiuri

Astfel în figura 1.13 triunghiurile ABC și ADE au unghiul A comun, iar în figura 1.14 unghiuri A suplementare.

În ambele cazuri avem: $\frac{\text{ariaABC}}{\text{ariaADE}} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}$

. Rezultă că dacă două triunghiuri au un unghi egal sau suplementar ele sunt echivalente dacă produsele laturilor care mărginesc acele unghiuri sunt egale.

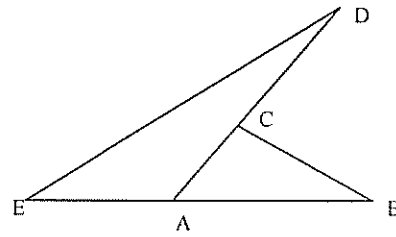


Figura 1.14

1. 5. Linii importante într-un triunghi și concurența lor

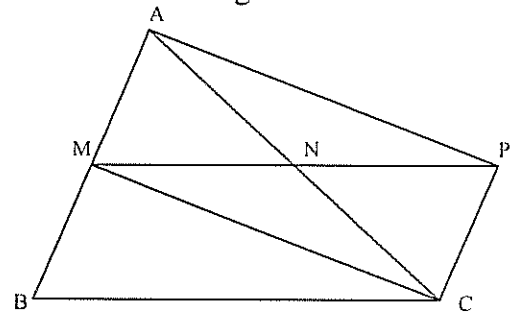
Definiție. Segmentul determinat de mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește linie mijlocie a triunghiului.

Teoremă. Linia mijlocie a unui triunghi, determinată de mijloacele a două laturi este paralelă cu cea de a treia latură și are ca lungime $\frac{1}{2}$ din lungimea celei de a treia laturi.

Demonstrație.

Fie $\triangle ABC$, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $(MA) \equiv (MB)$, $(NA) \equiv (NC)$. Fie P astfel încât $N \in (MP)$, $(MN) \equiv (NP)$, (Figura 1.15) rezultă AMCP – paralelogram deci $PC \parallel AB$ și $(PC) \equiv (MP)$. B și P sunt de o parte și de alta a lui MC deci MBCP este patrulater cu (PC) și (MB) paralele și congruente \Rightarrow MBCP – paralelogram $\Rightarrow MP \parallel BC$, $(MP) \equiv (BC)$ și deoarece $MP = 2MN \Rightarrow MN = \frac{BC}{2}$

Figura 1.15

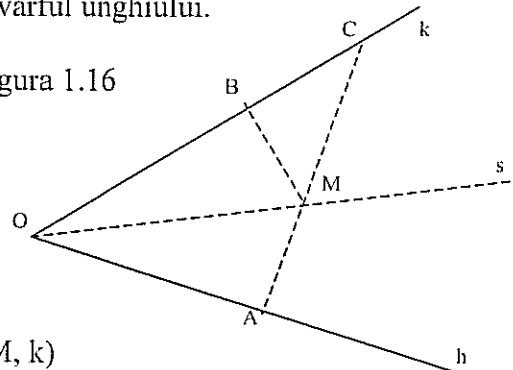


Teoremă. Bisectoarea unui unghi propriu, este locul geometric al punctelor din interiorul unghiului egal depărtate de laturile unghiului, reunit cu vârful unghiului.

Demonstrație (Figura 1.16):

Fie $\angle hOk$ un unghi propriu, O vârful unghiului, s bisectoarea lui și $M \in s - \{O\}$. Se notează cu A și B picioarele perpendicularelor din M pe suportul lui h și k. $A \in h$ căci altfel $\triangle OAM$ ar avea un unghi obtuz și unul drept; analog $B \in k$.

Figura 1.16



$\triangle OAM \equiv \triangle OBM$ (I.U.) $\Rightarrow (MA) \equiv (MB)$ deci $d(M, h) = d(M, k)$

Se va arăta că orice punct M cu proprietatea $d(M, k) = d(M, h)$ și $M \in \text{Int}(\angle hOk)$, aparține bisectoarei unghiului $\angle hOk$. Dacă A și B sunt picioarele perpendicularelor din M pe suporturile lui h și k se va demonstra că $A \in h$ și $B \in k$.

Presupunem contrariul, de exemplu $A \notin h \Rightarrow (AM)$ intersectează latura k. Fie $C = (AM) \cap k$. Deoarece $MC \geq MB$ și $AM > CM \Rightarrow AM > MB$, ceea ce contrazice ipoteza. La fel se arată că $B \in k$. Din $(AM) \equiv (BM) \Rightarrow \triangle OAM \equiv \triangle OBM$ cazul (I.C.) deci $\angle AOM \equiv \angle BOM \Rightarrow (OM)$ bisectoarea $\angle hOk$.

Teoremă. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție este centrul cercului înscris triunghiului.

Demonstrație:

Folosim teorema transversalei: dacă punctul D aparține interiorului unghiului propriu $\sphericalangle BAC$, atunci semidreapta (AD) și segmentul (BC) au un punct comun $(AD) \cap (BC) \neq \emptyset$.

Demonstrație: Fie (AB') semidreapta opusă lui (AB) (Figura 1.17). Semidreapta (AD) intersectează segmentul $(B'C)$ sau (BC) . Dar (AD) nu poate intersecta pe $(B'C)$, deoarece aceste mulțimi sunt de o parte și de alta a dreptei AC .

Din teorema transversalei rezultă că bisectoarele unghiurilor \hat{A} și \hat{B} intersectează pe (BC) și (AC) în câte un punct D și E (Figura 1.18). Din aceeași teoremă rezultă că există un punct I , $\{I\} = (AD) \cap (BE) = (BE) \cap (AD)$. Așadar $I \in \text{Int}(\sphericalangle ACB)$. Dar $d(I, BC) = d(I, AB)$; $d(I, AB) = d(I, AC)$ și deci $d(I, BC) = d(I, AC)$ și pentru că $I \in \text{Int}(\sphericalangle ACB) \Rightarrow [CI]$ este bisectoarea unghiului C .

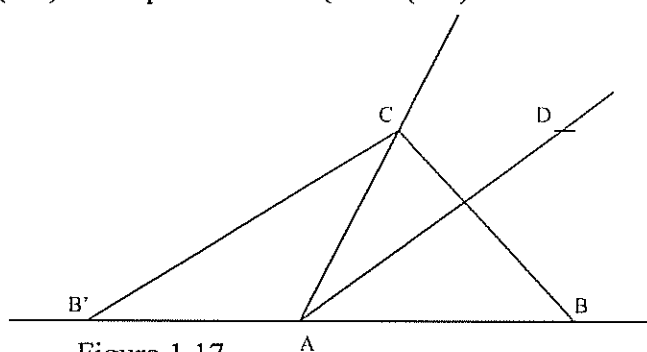


Figura 1.17

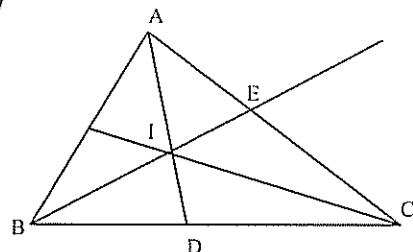


Figura 1.18

Fie I punctul de întâlnire al bisectoarelor AA'' și BB'' (Figura 1.19); acest punct se găsește și pe bisectoarea CC'' . Punctul I având aceeași distanță r față de cele trei laturi ale triunghiului, este centrul unui cerc tangent interior la cele trei laturi și se numește centrul cercului înscris.

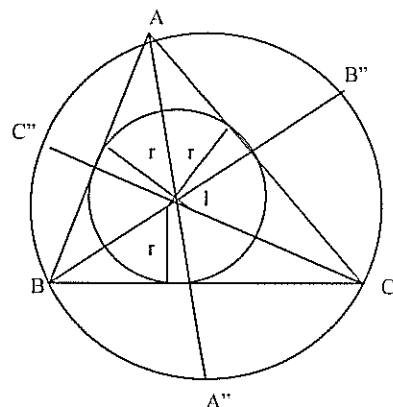


Figura 1.19

Teoremă. Dacă două dintre mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente, atunci cele trei mediatoare sunt concurente. Punctul de intersecție al lor este centrul cercului circumscris triunghiului.

Demonstrație:

Fie $\triangle ABC$, d_1 , d_2 mediatoarele laturilor (AB) și (BC) , fie $\{O\} = d_1 \cap d_2$ (Figura 1.20) rezultă $(OA) \equiv (OB)$, $(OB) \equiv (OC) \Rightarrow (OA) \equiv (OC) \Rightarrow O \in$ mediatoarei segmentului (AC) . Dacă $d_1 \cap d_2 = \emptyset \Rightarrow d_1 \parallel d_2$ dar $d_2 \perp BC$ și $d_1 \perp AB \Rightarrow$ prin B trec două perpendiculare distincte ceea ce este imposibil.

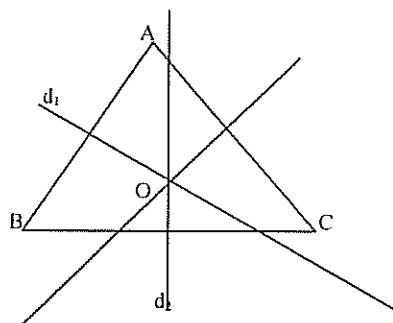


Figura 1.20

Teoremă Înălțimile unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție al lor este ortocentrul triunghiului.

Demonstrație: Fie $\triangle ABC$, A' , B' , C' picioarele perpendicularelor din A , B , C pe dreptele BC , AC , AB și triunghiul DEF format de paralelele duse la laturile $\triangle ABC$ prin vârfurile acestuia (Figura 1.21). Deci $ABCF$ și $BCAD$ sunt paralelograme $\Rightarrow (BC) \equiv (AF) \equiv (AD)$.

Pentru că $(BC) \parallel (DF)$ și $(AA') \perp (BC) \Rightarrow (AA') \perp (DF)$. Deci dreapta AA' este mediatoarea segmentului (DF) .

În mod analog dreptele BB' și CC' sunt mediatoarele segmentelor (DE) și (EF) . Prin urmare înălțimile triunghiului ABC sunt mediatoarele laturilor triunghiului DEF și deci sunt concurente.

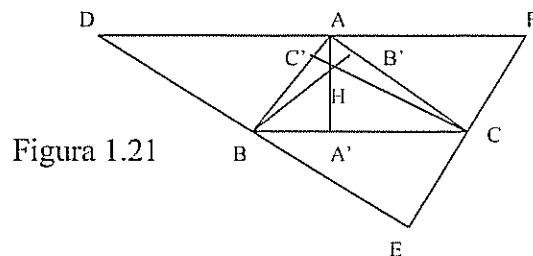


Figura 1.21

Teoremă. Medianele unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție se numește centru de greutate (sau baricentrul triunghiului, în cărțile engleze se întâlnește termenul mai scurt de centroid) și se găsește la $2/3$ de vârf și $1/3$ de bază.

Demonstrație. Fie $\triangle ABC$, $BD=DC$, $AE=EC$ cum $(BE \in \text{Int}(\angle ABC))$ și $A \in (BA)$, $D \in (BC)$, $\Rightarrow (BE \cap AD = G)$ (Figura 1.22). Deoarece $(AD) \in \text{Int}(\angle BAE) \Rightarrow \{G\} = (AD) \cap (BE)$. Fie M , N mijloacele segmentelor (AG) respectiv (BG) . În $\triangle ABG$, (MN) este linie mijlocie, deci $(MN) \parallel (AB)$ și $MN = \frac{AB}{2}$. În $\triangle ABC$, (DE) este linie

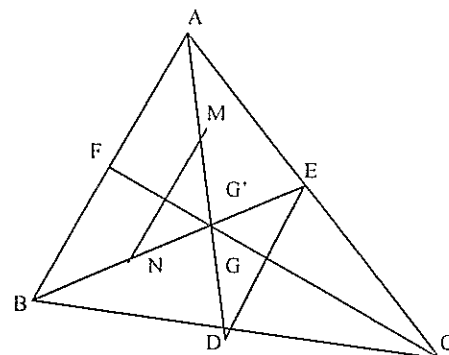


Figura 1.22

mijlocie, deci $(DE) \parallel (AB)$ și $DE = \frac{AB}{2} \Rightarrow (DE) \equiv (MN)$ și $(DE) \parallel (MN)$.

$MNDE$ este patrulater și deci este paralelogram $\Rightarrow GD = MG = AM = \frac{1}{3} AD$. Fie F mijlocul laturii (AB) și $\{G'\} = (FC) \cap (AD)$. În mod analog rezultă $DG = \frac{1}{3} AD$. Deoarece $G, G' \in (DA)$ rezultă G coincide cu G' .

1.6 Triunghiul ortic

Se numește triunghi ortic triunghiul determinat de picioarele înălțimilor unui triunghi dat.

Teoremă

Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și punctele $A' = \text{pr}_{BC}A$, $B' = \text{pr}_{AC}B$, $C' = \text{pr}_{AB}C$.

Atunci:

- (i) Triunghiurile $AB'C'$, $BA'C'$, $CB'A'$ sunt triunghiuri asemenea cu triunghiul ABC
- (ii) Semidreptele $[A'A]$, $[B'B]$, $[C'C]$ sunt bisectoarele unghiului triunghiului ortic
- (iii) Ortocentrul triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul ortic $A'B'C'$, iar vârfurile triunghiului ABC sunt centrele cercurilor exînscrise triunghiului ortic $A'B'C'$.
- (iv) Tangenta în punctul A la cercul circumscris triunghiului ABC este paralelă cu dreapta $B'C'$.
- (v) Dintre toate triunghiurile înscrise în triunghiul ABC , triunghiul ortic are perimetrul minim (teorema lui Fauerbach).

Demonstrație:

Se demonstrează că triunghiul $A'B'C'$ este asemenea cu triunghiul ABC . Patrulaterul $BCB'C'$ este inscriptibil deoarece $\angle ABB' \equiv \angle ACC'$. Rezultă că dreapta $B'C'$ este antiparalelă la dreapta BC , deci: $\angle AB'C' \equiv \angle ABC$ și $\angle AC'B' \equiv \angle ACB$

Conform punctului (i) rezultă că $\angle C'A'B \equiv \angle B'A'C \equiv \angle BAC$

Atunci $[A'A]$ este bisectoare a unghiului $\angle B'A'C'$

(iii) Din punctul (ii) se deduce că ortocentrul H al triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul ortic $A'B'C'$. Fie B'' punctul în care semidreapta $[A'B']$ intersectează cercul circumscris triunghiului. Este evident că $\sphericalangle C'B'A \equiv \sphericalangle B''B'A$, deci $[B'A]$ este bisectoare a unghiului $\sphericalangle C'B'B''$. Rezultă că punctul A este centrul cercului exînscriș triunghiului $A'B'C'$ tangent laturii $[B'C']$.

(iv) Folosind congruențele de unghiuri marcate pe figura, se obține că tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC este paralelă cu dreapta $B'C'$.

(v) Se observă că dacă M parcurge dreapta BC , atunci $B'M + MC'$ este minimă dacă $\sphericalangle B'MC \equiv \sphericalangle C'MB$ (Figura 1.24)

Într-adevăr, fie B_1 simetricul lui B' față de dreapta BC . Se unește C' cu B_1 . Fie $\{M_1\} = [BC] \cap [C'B_1]$. Oricare ar fi punctul $M \in [BC]$, $M \neq M_1$ avem:

$$M_1C' + M_1B' = M_1C' + M_1B_1 = C'B_1 < C'M + MB_1 = C'M + MB'$$

Am obținut astfel că punctul M_1 construit anterior este punctul de pe dreapta BC cu proprietatea că $MC' + MB'$ este minimă. Dar unghiurile $\sphericalangle C'M_1B$ și $\sphericalangle B'M_1C$ sunt congruente deoarece fiecare este congruent cu $\sphericalangle B_1M_1C$.

Fie acum un triunghi $A'B'C'$ înscris în triunghiul ABC ($A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$). Fixând două câte două vârfuri ale acestui triunghi, se obține că minimum perimetrului se atinge când laturile triunghiului $A'B'C'$ sunt egal înclinate pe laturile triunghiului ABC , deci când unghiurile marcate pe figură sunt congruente. (Figura 1.25)

Folosind același raționament ca în demonstrația punctului (ii) se obține că A , B și C sunt centrele cercurilor exînscrișe triunghiului $A'B'C'$. Rezultă că $[A'A]$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle (B'A'C)$; deci $\sphericalangle (C'A'C) \equiv \sphericalangle (B'A'A)$. Rezultă $[AA'] \perp [BC]$. Analog se obține $[BB'] \perp [AC]$ și $[CC'] \perp [AB]$. Prin urmare $A'B'C'$ este triunghiul ortic.

1.7 Centrele cercurilor exînscrișe

Două bisectoare exterioare și una interioară, trecând fiecare prin câte un vârf al triunghiului, sunt concurente.

Raționamentul este identic; se obțin astfel trei centre noi: I_a, I_b, I_c ale cercurilor tangente exterioare la laturile triunghiului ABC ; le numim centrele cercurilor exînscrișe.

Triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_aI_bI_c$.

Într-adevăr, bisectoarea interioară $[CI_c]$ este perpendiculară pe bisectoarea exterioară $[I_bI_a]$. Inversând această proprietate se poate spune:

Înălțimile unui triunghi sunt bisectoarele triunghiului ortic.

Figura 1.23

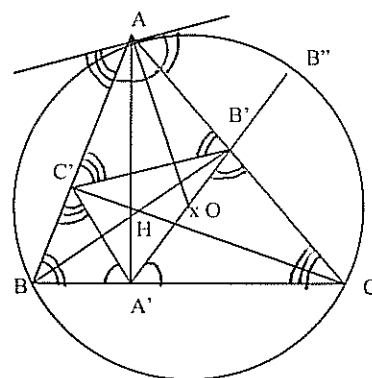


Figura 1.24

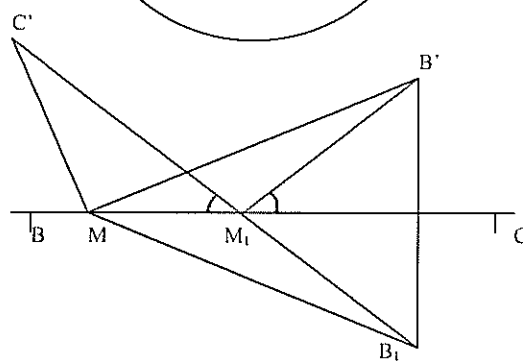
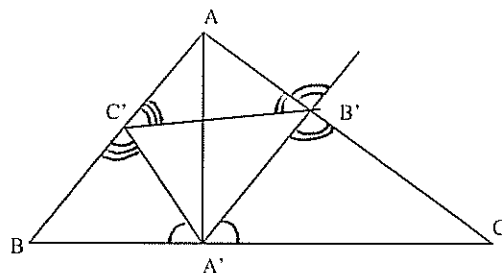
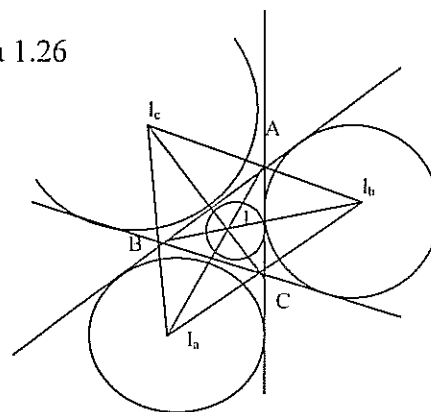


Figura 1.25



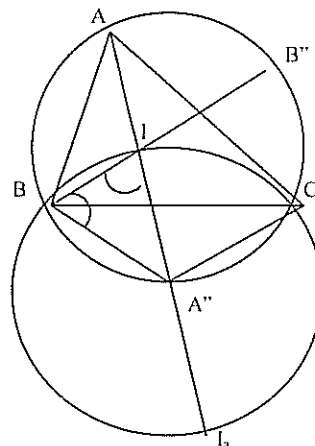
Această proprietate poate fi stabilită și direct pentru că unghiurile $\sphericalangle (IAI_c) \equiv \sphericalangle (II_bC)$ și $\sphericalangle (IAB) \equiv \sphericalangle (BI_cI)$ (Figura 126.) din patrulateralele $ICAI_b$ și $IABI_c$. Pe de altă parte, unghiurile $\sphericalangle (BI_cI) \equiv \sphericalangle (II_bC)$ sunt egale fiind complementare unghiului \hat{I}_a .

Figura 1.26



Fie A'' mijlocul arcului BC (Figura 1.27). Avem $[A''I] = [A''C] = [A''B] = [A''I_a]$. Într-adevăr, triunghiul $A''BI$ este isoscel pentru că unghiul $\sphericalangle (BIA'') = (\hat{A} + \hat{B})/2$, iar unghiul $\sphericalangle (IBA'')$ are aceeași valoare. Același raționament pentru triunghiul $A''IC$. Centrul cercului BIC , care trece în mod evident prin I_a pentru că patrulaterul $CBII_a$ este inscribibil, e situat deci în mijlocul A'' al arcului BC . Unghiul $\sphericalangle BIC$ este egal cu $90^\circ + \hat{A}/2$.

Figura 1.27



Într-adevăr, măsura sa este a lui $\hat{A} + (\hat{B} + \hat{C})/2 = 90^\circ + \hat{A}/2$. În consecință unghiul $\sphericalangle BI_aC$ este egal cu $90^\circ - \hat{A}/2$.

1.8 Aplicații

1. Să se arate că într-un triunghi există relația:

$$h_a + h_b + h_c \geq 9r, \text{ notațiile fiind cele obișnuite.}$$

Se alege $x_1 = h_a$, $x_2 = h_b$, $x_3 = h_c$ și se ține cont că: $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$. Suprafața unui triunghi poate fi scrisă: $S = 1/2ah_a = 1/2bh_b = 1/2ch_c = pr$, și deci $\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}$, $\frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}$, $\frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}$, $\frac{1}{r} = \frac{2p}{2S}$,
așadar: $\frac{h_a + h_b + h_c}{r} \geq 9$

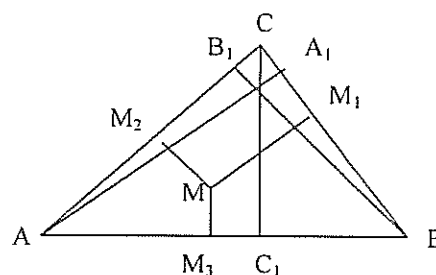
2. Să se arate că într-un triunghi oarecare are loc relația: $r_a + r_b + r_c \geq 9r$, notațiile fiind cele uzuale.

Fie r_a , r_b , r_c , razele cercurilor exînscrise triunghiului. $S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c) = pr$ și prin urmare: $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p-2p}{S} = \frac{1}{r}$. Inegalitatea cerută este acum evidentă.

3. Dacă d_a , d_b , d_c sunt distanțele punctului M la laturile triunghiului ABC , iar h_a , h_b , h_c sunt înălțimile acestuia, atunci: $\frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c} = 1$ (Figura 1.28)

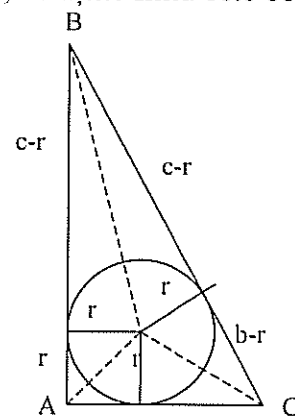
Putem scrie imediat relațiile: $2S = ah_a$, $2S(BMC) = ad_a$, $2S(AMC) = bd_b$, $2S(AMB) = cd_c$, din care rezultă imediat: $\frac{S(BMC)}{S} = \frac{d_a}{h_a}$, $\frac{S(AMC)}{S} = \frac{d_b}{h_b}$, $\frac{S(AMB)}{S} = \frac{d_c}{h_c}$,
iar prin însumare, deducem relația cerută.

Figura 1.28



4. Într-un triunghi dreptunghic are loc relația: $2r \leq a(\sqrt{2} + 1)$, notațiile fiind cele obișnuite.
 Din figura 1.29, se observă imediat
 că: $2r = b + c - a$. Înlocuind, se obține succesiv
 $b + c - a \leq a(\sqrt{2} - 1)$, $\frac{b+c}{a} - 1 \leq \sqrt{2} - 1$,
 $b + c \leq \sqrt{2}a$, $b^2 + c^2 + 2bc \leq a^2$, $2bc \leq a^2 - b^2 - c^2$

Figura 1.29



5. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic este adevărată inegalitatea: $R \geq r(1 + \sqrt{2})$.
 Cu notațiile obișnuite și observând că
 $AM = AN = r$, avem (Figura 1.30):
 $a = BP + PC = BM + CN = c - r + b - r$,
 deci $r = (b + c - a)/2$. Deoarece $R = a/2$,
 inegalitatea cerută se scrie sub forma:
 $a \geq (b + c - a) \cdot (1 + \sqrt{2})$ sau $a\sqrt{2} \geq b + c$.

Ultima inegalitate revine la $(b - c)^2 \geq 0$,
 ținând seama de teorema lui Pitagora.
 Egalitatea are loc deci dacă triunghiul este
 isoscel.

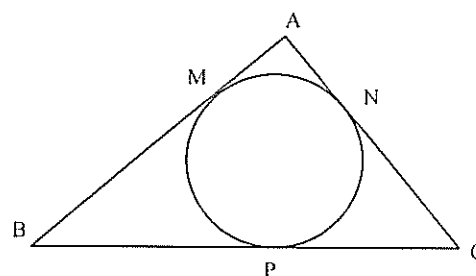


Figura 1.30

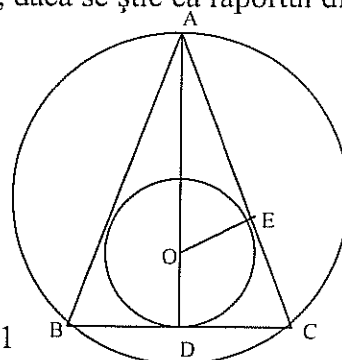
6. Să se afle măsurile unghiurilor unui triunghi isoscel, dacă se știe că raportul dintre razele
 cercului circumscris și înscris este egal cu 3.

Rezolvare. Prin ipoteză $R = 3r$. Notăm
 cu α măsura unghiului CAD (jumătate din
 măsura unghiului BAC) (Figura 1.31), avem

$$AO = \frac{r}{\sin \alpha}, \quad AD = \frac{r}{\sin \alpha} + r = \frac{r(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Triunghiul ABC fiind înscris în cercul de rază
 R, rezultă

Figura 1.31



$$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4\sigma[ABC]} = \frac{AC^2}{2AD} = \frac{AD}{2\cos^2 \alpha} = \frac{r(1 + \sin \alpha)}{2\sin \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{r}{2\sin \alpha(1 - \sin \alpha)}, \text{ de unde, ținând}$$

seama de ipoteză, $2\sin \alpha(1 - \sin \alpha) = 1/3$ sau $6\sin^2 \alpha - 6\sin \alpha + 1 = 0$.

De aici rezultă $\sin \alpha = (3 \pm \sqrt{3})/6$. Ambele valori sunt acceptabile și obținem pentru unghiul
 A măsurile $2\arcsin \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$.

Cunoscând măsura unghiului A, se deduc apoi măsurile unghiurilor B și C.

7. Să se demonstreze că într-un triunghi ABC este adevărată inegalitatea

$$\sum \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \geq 2\sqrt{3}.$$

Rezolvare.

Exprimând $\sin \frac{A}{2}$, $\sin \frac{B}{2}$, $\cos \frac{C}{2}$ cu ajutorul laturilor, obținem

$$\frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = a \sqrt{\frac{p-b}{p(p-a)(p-c)}} = \frac{a(p-b)}{S} \text{ și ținând seama de inegalitatea mediilor, avem}$$

$$\sum \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{1}{S} \sum a(p-b) \geq \frac{3}{S} \sqrt{abc(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\text{Dar } abc=4RS \text{ și } (p-a)(p-b)(p-c)=S^2/p, \text{ astfel încât } \sum \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \geq 3\sqrt{\frac{4R}{p}}.$$

$$\text{Trebuie demonstrat că } 3\sqrt{\frac{4R}{p}} \geq 2\sqrt{3}, \text{ adică } \frac{p}{R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ iar aceasta revine la } \sum \sin A \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

inegalitate care a fost demonstrată mai înainte.

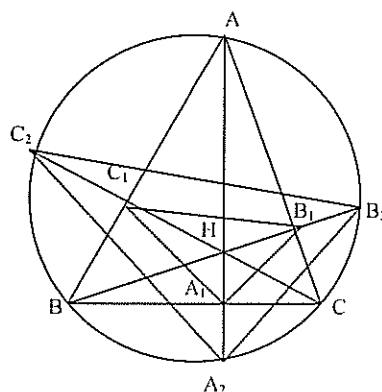
8. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care se duc înălțimile AA_1 , BB_1 , CC_1 . Prelungirea acestora intersectează cercul circumscris triunghiului în A_2 , B_2 , C_2 . Să se arate că, dacă

$$S_1 \text{ și } S_2 \text{ sunt ariile triunghiurilor } A_1B_1C_1 \text{ și } A_2B_2C_2 \text{ este adevărată inegalitatea: } \frac{S_2}{S_1} \sum \frac{AA_1}{AA_2} \geq 9.$$

Rezolvare.

Deoarece A_2 , B_2 , C_2 sunt simetricele ortocentrului H față de laturile triunghiului, deci față de punctele A_1 , B_1 , C_1 (Figura 1.32), rezultă că segmentul $[A_1B_1]$ este linie mijlocie în triunghiul HA_2B_2 , deci este paralel cu segmentul $[A_2B_2]$ și $A_1B_1=A_2B_2/2$; analog pentru $[A_1C_1]$ și $[B_1C_1]$. Triunghiul $A_1B_1C_1$ este deci asemenea cu triunghiul $A_2B_2C_2$ (raport de asemănare $1/2$).

Figura 1.32



$$\text{Atunci } \sigma[A_2B_2C_2]/\sigma[A_1B_1C_1]=4 \text{ și rămâne să demonstrăm că: } \sum \frac{AA_1}{AA_2} \geq \frac{9}{4}.$$

Dar avem

$$\sum \frac{AA_1}{AA_2} = \sum \frac{AA_1}{AA_1 + A_1A_2} = \sum \frac{AA_1}{AA_1 + HA_1} = \sum \frac{1}{1 + \frac{HA_1}{AA_1}}$$

$$\sum (1 + \frac{HA_1}{AA_1}) = 3 + \sum \frac{HA_1}{AA_1} = 3 + \sum \frac{\sigma[HBC]}{\sigma[ABC]} = 3 + \frac{\sum \sigma[HBC]}{\sigma[ABC]} = 4.$$

Atunci, ținând seama că $\sum (1 + \frac{HA_1}{AA_1}) \cdot \sum \frac{1}{1 + \frac{HA_1}{AA_1}} \geq 9$, rezultă inegalitatea cerută.

9. Se consideră dreptunghiul ABCD și I un punct oarecare în interiorul său. Se duc dreptele: d_A perpendiculară în A pe [AI], d_D perpendiculară în B pe [BI]. Fie intersecțiile $\{M\}=d_A \cap d_B$; $\{N\}=d_B \cap d_C$, $\{P\}=d_C \cap d_D$, $\{Q\}=d_D \cap d_A$. Să se arate că dreptele MP și NQ sunt perpendiculare.

Fie R mijlocul segmentului [IM], iar S mijlocul segmentului [IP] (Figura 1.33). Segmentul [RS], fiind linie mijlocie în triunghiul IMP, va fi paralel cu [MP].

Pe de altă parte, din triunghiurile dreptunghice DPI și CPI, în care [DS] și [CS] sunt mediane pe ipotenuză, avem $DS = \frac{IP}{2} = CS$ și deci punctul S aparține mediatoarei laturii [CD].

Analog, punctul R aparține mediatoarei laturii [AB] și cum cele două mediatoare coincid, deoarece ABCD este dreptunghic, rezultă că dreapta RS este paralelă cu laturile [BC] și [AD] ale dreptunghiului. Atunci și dreapta MP este paralelă cu aceste laturi.

Analog, dreapta QN este paralelă cu laturile [BC] și [CD] și, prin urmare, dreptele MP și NQ sunt perpendiculare.

10. Să se demonstreze geometric relația (Ion Ionescu) $1 < \sqrt{2} < 2$

Fie ABCD un pătrat de latură a. Se duce diagonala BD. Pentru triunghiul ABD teorema lui Pitagora ne dă:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \text{ sau } BD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, \text{ deci } BD = a\sqrt{2}.$$

În triunghiul ABD, perpendiculara AD pe AB este mai scurtă ca oblica BD, iar această latură este mai mică decât suma celorlalte două AB și AD.

Deci

$$AD < BD \text{ și } BD < AB + AD \text{ sau } BD < 2AB$$

sau $a < a\sqrt{2}$ și $a\sqrt{2} < 2a$. Deci $1 < \sqrt{2} < 2$.

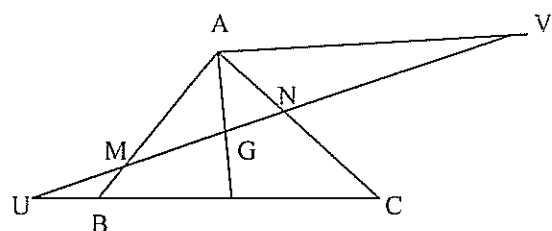
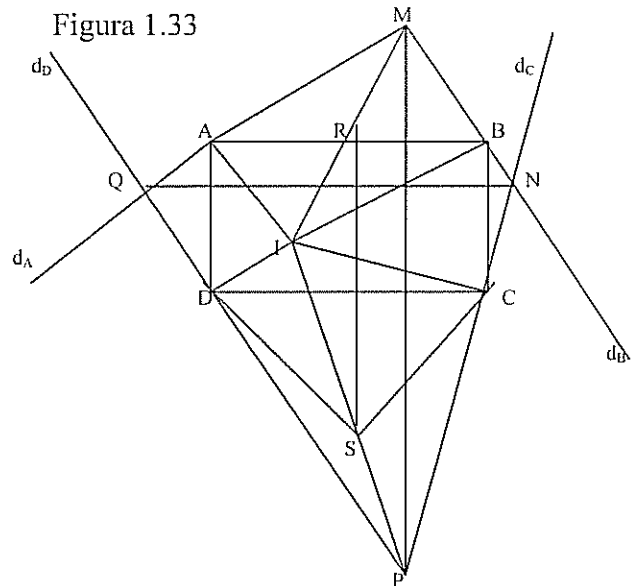
11. Se consideră un triunghi oarecare ABC. Fie G centrul său de greutate. O dreaptă variabilă trecând prin G intersectează segmentele [AB] și [AC] respectiv în M și N. Să se arate că:

$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = 1.$$

Dacă $[MN] \parallel [BC]$ atunci $\frac{BM}{MA} = \frac{CN}{NA} = \frac{1}{2}$, și relația se verifică.

Să presupunem acum că dreapta MN va intersecta dreapta BC într-un punct U, iar paralela prin A la dreapta BC într-un punct V (Figura 1.34). Fie O mijlocul segmentului [BC]. Deoarece dreapta MN taie laturile [AB] și [AC] ale triunghiului ABC, rezultă conform axiomei lui Pasch că dreapta MN nu taie latura [BC], deci punctul U nu este pe segmentul [BC]. Să tratăm cazul când $B \in [UC]$ (analog se tratează cazul când $C \in [BU]$). Folosind asemănările de triunghiuri care apar, putem scrie:

Figura 1.34



$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = \frac{UB}{AV} + \frac{UC}{AV} = \frac{(UO - BO) + (UO + OC)}{AV} = \frac{2UO}{AV} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

12. Suma pătratelor a două laturi ale unui triunghi este egală cu de două ori pătratul jumătății celeilalte laturi adunat cu de două ori pătratul mediane corespunzătoare aceleiași laturi (Figura 1.35).

Notând cu D mijlocul laturii [BC], avem:

$$AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$$

13. Locul geometric al punctelor astfel ca suma pătratelor distanțelor la două puncte fixe să fie constantă, este un cerc cu centrul în mijlocul segmentului determinat de cele două puncte fixe.

14. Diferența pătratelor a două laturi ale unui triunghi este egală cu de două ori produsul dintre a treia latură cu proiecția pe această latură a mediane care-i corespunde.

Astfel în triunghiul ABC (Figura 1.36), dreapta AD este mediana laturii [BC], iar [DE] este proiecția ei pe aceeași latură. Avem $AB^2 - AC^2 = 2BC \cdot DE$

15. Locul geometric al punctelor astfel ca diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe să fie constantă este o perpendiculară la dreapta ce unește punctele fixe.

16. Produsul a două laturi ale unui triunghi este egal cu produsul diametrului cercului circumscris triunghiului, cu înălțimea corespunzătoare celeilalte laturi

$$AB \cdot AC = 2R \cdot AN \text{ unde } 2R = AD$$

$$\triangle ABD \sim \triangle ACH$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{BD}{HC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow$$

$$AB \cdot AC = AD \cdot AH$$

$$\text{Cum } AD = 2R \Rightarrow AB \cdot AC = 2R \cdot AH$$

Figura 1.35

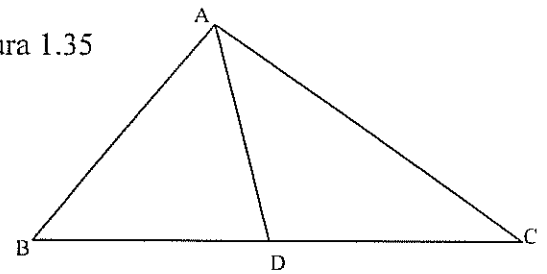


Figura 1.36

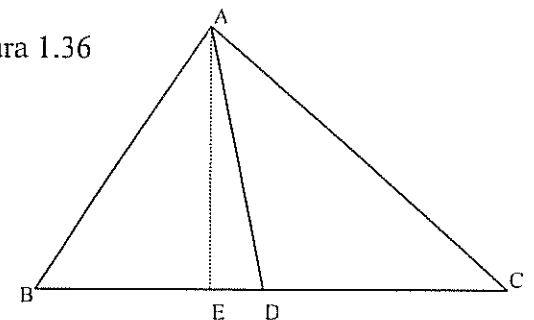
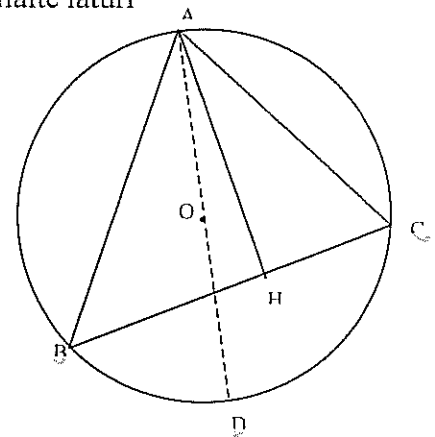


Figura 1.37



CAPITOLUL II

DREAPTE REMARCABILE

2.1 Transversale

Teorema lui Menelau

Prima apariție a teoremei se întâlnește în cartea lui Euclid (sec. 3 î.e.n.) ce purta titlul “Porisma” (ulterior pierdută); adesea ea era atribuită lui Claudiu Ptolemeu (sec. 2 e.n.), deoarece a fost cunoscută mai întâi din lucrarea acestuia “Almagest”.

G. Ceva a redescoperit-o și a publicat-o în “De lineis rectis re invicem sacantibus statica constructio” (1678), considerând-o ca o teoremă nouă. Independent de demonstrația lui Ceva, bazată pe teoria centrelor de greutate, J. Poncelet (1822) a demonstrat-o cu ajutorul asemănării triunghiurilor dreptunghice care se formează ducând din vârfurile triunghiului dat perpendiculare pe transversală.

Teorema continuă să păstreze – poate dintr-un punct de vedere, îndreptățit – numele lui Menelau (sec. 1 e.n.), cel care a publicat-o în renumita sa lucrare “Sferika” și a folosit-o la deducerea unor teoreme fundamentale ale trigonometriei, mai mult, el a arătat că această teoremă este valabilă și în cazul triunghiului sferic, dezvoltând pe această bază trigonometria sferică.

Fie A' , B' , C' (Figura 2.1) trei puncte situate pe laturile BC , CA , AB , ale unui triunghi. Condiția necesară și suficientă pentru ca aceste puncte să fie coliniare, este:

$$\frac{|A'B|}{|A'C|} \cdot \frac{|B'C|}{|B'A|} \cdot \frac{|C'A|}{|C'B|} = +1$$

Această condiție este necesară.

Într-adevăr, fie A' , B' , C' punctele de intersecție ale unei transversale d cu dreptele BC , CA , AB . Însemnăm prin p , q , r distanțele de la vârfurile A , B , C la dreapta d .

Avem $|A'B|/|A'C| = q/r$, $|B'C|/|B'A| = r/p$, $|C'A|/|C'B| = p/q$ de unde

$$\frac{|A'B|}{|A'C|} \cdot \frac{|B'C|}{|B'A|} \cdot \frac{|C'A|}{|C'B|} = +1$$

Să trecem acum la semne: o transversală taie în interior, sau două laturi sau nici una din laturi, căci ea dacă pătrunde în interiorul unui triunghi printr-un punct, atunci ea trebuie să iasă printr-un alt punct. În toate cazurile, sunt două rapoarte negative și, în consecință, produsul celor trei rapoarte va fi totdeauna pozitiv. Relația lui Menelau este de asemenea suficientă.

Teorema lui Ceva. Ceviene.

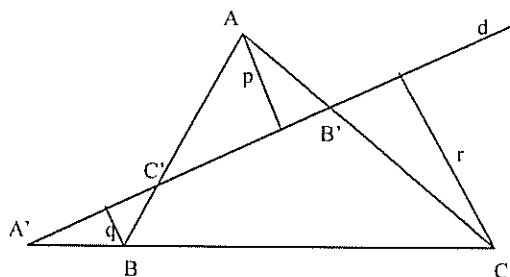
Teoremă.

Se consideră un triunghi ABC și punctele $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Dacă dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente, atunci $(|A'B|/|A'C|)(|B'C|/|B'A|)(|C'A|/|C'B|) = 1$

Demonstrație (Figura 2.2)

Fie $\{P\} = AA' \cap BB' \cap CC'$.

Figura 2.1



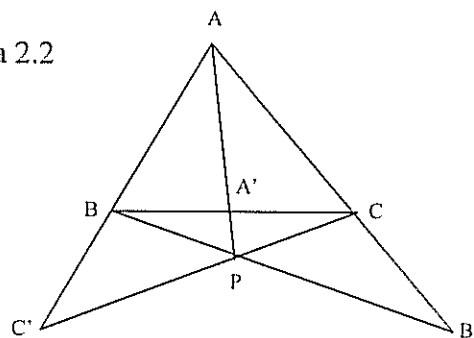
Aplicăm teorema lui Menelau pentru triunghiul $AA'B$ și punctele coliniare C, P, C' . Rezultă:
 $(|CB|/|CA|)(|PA|/|PA'|)(|C'A|/|C'B|)=1$.

Aplicăm teorema lui Menelau pentru triunghiul $AA'C$ și punctele coliniare B, P, B' . Rezultă:

$$(|BA'|/|BC|)(|B'C|/|B'A|)(|PA|/|PA'|)=1$$

Înmulțim ultimele două relații se obține:
 $(|A'B|/|A'C|)(|B'C|/|B'A|)(|C'A|/|C'B|)=1$

Figura 2.2



Reciproca teoremei lui Ceva

Fie ABC un triunghi și punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$. Dacă:

$$(|A'B|/|A'C|)(|B'C|/|B'A|)(|C'A|/|C'B|)=1$$

atunci dreptele AA' , BB' , CC' sunt concurente.

Demonstrație (Figura 2.3).

Fie $\{P\} = [BB'] \cap [CC']$ și fie $\{A''\} = [PA] \cap [BC]$.

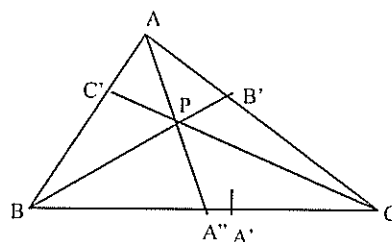
Se aplică teorema lui Ceva pentru triunghiul ABC și dreptele concurente AA'' , BB' și CC' .

Rezultă:

$$(|A''B|/|A''C|)(|B'C|/|B'A|)(|C'A|/|C'B|)=1.$$

Din ultima egalitate și din relația din enunț, se obține $(|A''B|/|A''C|) = (|A'B|/|A'C|)$. Deoarece A' și A'' sunt puncte interioare segmentului $[BC]$, se obține $A' = A''$.

Figura 2.3



Forma trigonometrică a relației lui Ceva.

Fie triunghiul ABC și fie cevianele AA_1 , BB_1 , CC_1 concurente în M ($A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$). Se notează $\alpha = m(\angle MAB)$, $\beta = m(\angle MBC)$, $\gamma = m(\angle MCA)$ (Figura 2.4)

Din teorema sinusurilor în triunghiul AMB rezultă:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{\sin \alpha}{\sin(B - \beta)}. \text{ Analog } \frac{MA}{MC} = \frac{\sin \gamma}{\sin(A - \alpha)} \text{ și } \frac{MC}{MB} = \frac{\sin \beta}{\sin(C - \gamma)}.$$

Figura 2.4

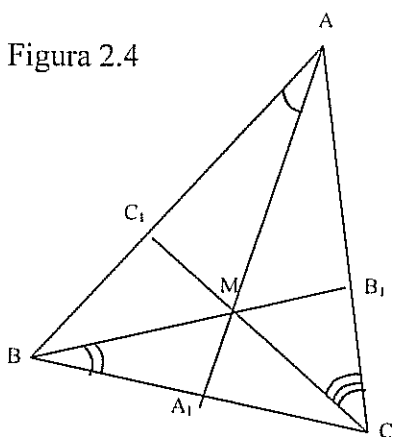
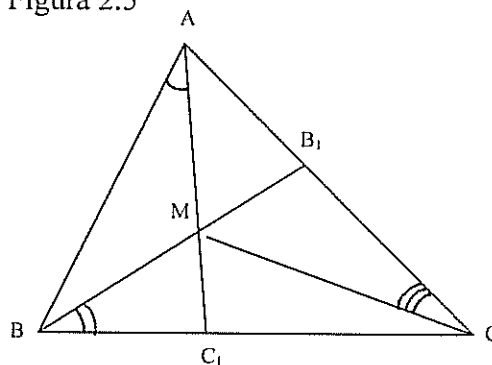


Figura 2.5



$$\text{Prin înmulțirea lor se obține: } \frac{\sin \alpha}{\sin(A - \alpha)} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(B - \beta)} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(C - \gamma)} = 1 \quad (*)$$

(relația lui Ceva).

Reciproc, fie $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$ și $C_1 \in (AB)$ astfel încât să fie satisfăcută relația (*), unde

$\alpha = m(\angle A_1AB)$, $\beta = m(\angle B_1BC)$, $\gamma = m(\angle C_1CA)$. Se demonstrează că dreptele AA_1 , BB_1 și CC_1 sunt concurente (Figura 2.5)

Se presupune că unghiul $\angle ACB$ este ascuțit. Fie M punctul de intersecție a cevienelor AA_1 , BB_1 și fie γ' măsura unghiului $\angle ACM$. Se va demonstra că $\gamma' = \gamma$.

Deoarece cevienele AM , BM , CM sunt concurente, rezultă relația:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(A - \alpha)} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(B - \beta)} \cdot \frac{\sin \gamma'}{\sin(C - \gamma')} = 1 \quad (*)$$

Din (*) și (**) se obține: $\frac{\sin \gamma}{\sin(C - \gamma)} = \frac{\sin \gamma'}{\sin(C - \gamma')}$.

Se notează valoarea acestui raport cu t . Deoarece unghiul $\angle ACB$ este unghi ascuțit, este suficient să se demonstreze că ecuația $\frac{\sin x}{\sin(C - x)} = t$ are soluție unică $\gamma < C$.

Cum această ecuație are obligatoriu soluția γ' , rezultă $\gamma = \gamma'$. Deci problema s-a redus la a arăta că ecuația are soluție în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Pentru aceasta se efectuează calculele necesare și se obține: $t \sin C \cos x - (t \cos C + 1) \sin x = 0$

Rezultă: $\operatorname{tg} x = \frac{t \sin C}{t \cos C + 1}$

Dar $\frac{t \sin C}{t \cos C + 1} \in (0, \infty)$, deci ecuația considerată are soluția unică ce aparține intervalului $(0, \frac{\pi}{2})$ și cum γ' era de asemenea soluție cu această proprietate, rezultă $\gamma = \gamma'$, deci dreptele AA_1 , BB_1 și CC_1 sunt concurente.

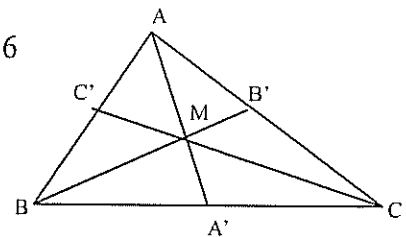
Orice dreaptă ce trece prin vârful triunghiului se numește ceviană și este desemnată prin vârful prin care trece și prin piciorul ei la latura opusă.

Acestea fiind date, pentru ca trei ceviene AA' , BB' , CC' să fie concurente, este necesar și suficient ca $(|A'B|/|A'C|) \cdot (|B'C|/|B'A|) \cdot (|C'A|/|C'B|) = -1$.

Condiția este necesară. Într-adevăr, să considerăm un sistem de trei ceviene AA' , BB' , CC' concurente în M .

Triunghiurile ABM și ACM (Figura 2.6) având baza comună AM și înălțimile lor coborâte din B și C proporționale cu $A'B$ și $B'C$, avem între ariile $\triangle AMB$, $\triangle AMC$: $A'B/A'C = \sigma[AMB]/\sigma[AMC]$.

Figura 2.6



De asemenea $B'C/B'A = \sigma[BMC]/\sigma[BMA]$, $C'A/C'B = \sigma[CMA]/\sigma[CMB]$, deci

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{\sigma[ABM]}{\sigma[AMC]} \cdot \frac{\sigma[BMC]}{\sigma[BMA]} \cdot \frac{\sigma[CMA]}{\sigma[CMB]} = +1$$

Să trecem acum la semne: când punctul M este în interiorul triunghiului, fiecare raport este negativ, deci, produsul este de asemenea negativ. Dacă punctul M este în exterior, în unghiul A , de exemplu, primul raport rămâne negativ, celelalte sunt pozitive; produsul lor este și el negativ. Condiția este de asemenea suficientă. Într-adevăr, fie M punctul de intersecție al dreptelor BB' și CC' și fie A'' punctul de întâlnire al dreptelor AM și BC . Din relația dată:

$(|A'B|/|A'C|) \cdot (|B'C|/|B'A|) \cdot (C'A/C'B) = -1$, deducem

$$|A'B|/|A'C| = -(|C'B|/|C'A|) \cdot (|B'A|/|B'C|)$$

La fel, dreptele AA'' , BB'' , CC'' fiind concurente, din prima parte avem: $|A''B|/|A''C| = -(|C'B|/|C'A|) \cdot (|B'A|/|B'C|)$, deci: $|A'B|/|A'C| = |A''B|/|A''C|$, ceea ce ne arată că punctele A' și A'' coincid.

Aceste rapoarte, luate într-un sens circular, trebuie să aibă ca produs unitatea. Se vede că în acest fel teorema lui Ceva reduce aceste genuri de probleme la simple verificări.

Relația lui Ceva poate fi scrisă: $|A'B| \cdot |B'C| \cdot |C'A| = |A'C| \cdot |B'A| \cdot |C'B|$.

Sub această formă, se vede că produsul a trei segmente neadiacente este egal cu produsul celorlalte trei.

Ceviene izotomice. Puncte izotomice.

Se spune că două ceviane AA' și AA'' sunt izotomice dacă picioarele lor A' și A'' sunt simetrice în raport cu mijlocul segmentului BC . Cu ajutorul teoremei lui Ceva, se află că izotomicele celor trei ceviane concurente în M se întâlnesc într-un punct M' . Punctele M și M' se numesc puncte izotomice.

2.2. Dreapta lui Lemoine

Teoremă (Carnot)

Tangentele la cercul circumscris unui triunghi neisoscel în vârfurile lui taie laturile opuse în puncte situate pe o aceeași dreaptă (numită și dreapta lui Lemoine a triunghiului ABC).

Demonstrație (Figura 2.7).

Fie $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$, astfel încât dreptele A_1A , B_1B , C_1C sunt tangente cercului circumscris triunghiului ABC . Se demonstrează că A_1 , B_1 , C_1 sunt coliniare folosind reciproca teoremei lui Menelau. Deci se va demonstra că:

$$(|B_1A|/|B_1C|) \cdot (|A_1C|/|A_1B|) \cdot (|C_1B|/|C_1A|) = 1. \quad (1)$$

Se evaluează fiecare raport din produs. Se observă că triunghiurile A_1AB și A_1CA sunt asemenea, având unghiul \hat{A}_1 comun și $\angle A_1AB = \angle A_1CA$, de unde rezultă: $A_1B/A_1A = AB/AC = A_1A/A_1C$.

Din $A_1B/A_1A = AB/AC$ rezultă $(A_1B/A_1A)(A_1B/A_1A) = AB^2/AC^2$. Dacă se înlocuiește A_1B/A_1A cu A_1A/A_1C , se obține relația $A_1B/A_1C = AB^2/AC^2$.

Analog se obțin relațiile $B_1A/B_1C = BA^2/BC^2$ și $C_1B/C_1A = CB^2/CA^2$. Înlocuind în produsul considerat, se obține relația (1), deci punctele A_1 , B_1 , C_1 sunt coliniare.

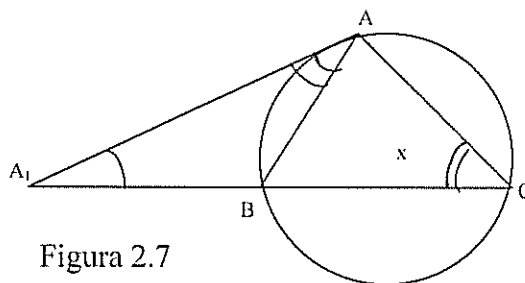


Figura 2.7

2.3. Dreapta lui Gauss

Mijloacele diagonalelor unui patrulater complet sunt coliniare.

Demonstrație.

Se folosește teorema lui Menelau. Se consideră patrulaterul complet $BCB'C'A'A$. Se scrie teorema lui Menelau pentru triunghiul ABC și punctele coliniare A' , B' , C' :

$$(1) (|A'B|/|A'C|) \cdot (|B'C|/|B'A|) \cdot (|C'A|/|C'B|) = 1$$

Se consideră triunghiul având ca vârfuri mijloacele M , N și P ale laturilor $[BC]$, $[CA]$ și $[AB]$ ale triunghiului ABC (Figura 2.8).

Notând cu M' , N' , P' mijloacele diagonalelor $[AA']$, $[BB']$ și $[CC']$ se observă că paralela dusă prin punctul M' la dreapta BC conține punctele N și P ($[M'N] \parallel [A'C]$; și $[M'P] \parallel [A'B]$).

Analog $N' \in PM$ și $P' \in MN$. Din (1)

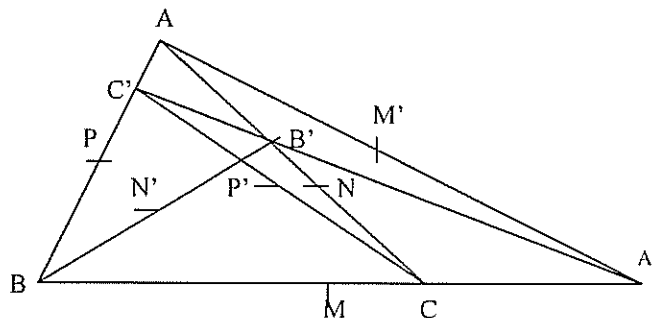


Figura 2.8

rezultă: $\frac{|A'B|/2}{|A'C|/2} \cdot \frac{|B'C|/2}{|B'A|/2} \cdot \frac{|C'A|/2}{|C'B|/2} = 1$, adică:

$$(|M'P|/|M'N|)(|N'M|/|N'P|)(|P'N|/|P'M|)=1. (2)$$

Deoarece $N' \in [MP]$, $P' \in [NM]$ și $M' \in [PN]$, rezultă că se poate folosi reciproca teoremei lui Menelau pentru triunghiul MNP și punctele M' , N' , P' . Se obține astfel că punctele M' , N' și P' sunt coliniare (dreapta $M'N'$ se numește dreapta lui Gauss).

2.4 Dreapta lui Aubert.

Teoremă (Aubert)

Ortocentrele celor patru triunghiuri formate cu laturile unui patrulater complet se găsesc pe o aceeași dreaptă (numită dreapta lui Aubert).

Pentru demonstrație se folosește următoarea leamă:

Lemă. Fie ABC un triunghi și fie $A' = \text{pr}_{BC}A$, $B' = \text{pr}_{CA}B$, $C' = \text{pr}_{AB}C$. Atunci $HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$, unde H este ortocentrul triunghiului.

Demonstrația lemei (Figura 2.9).

Este ușor de văzut că: $\triangle HB'A \sim \triangle HA'B$ și $\triangle HA'C' \sim \triangle HC'A$. De aici rezultă că $HA \cdot HA' = HB \cdot HB'$ și $HA \cdot HA' = HC \cdot HC'$.

Demonstrația teoremei (Figura 2.10)

Se consideră patrulaterul complet $ABCDEF$. Se știe din teorema lui Gauss că mijloacele O_1, O_2, O_3 ale diagonalelor $[AC]$, $[BD]$ și $[EF]$ sunt situate pe dreapta lui Gauss, notată d .

Se consideră cercurile $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ și \mathcal{C}_3 de diametre $[AC]$, $[BD]$ și, respectiv, $[EF]$. Notăm cu H ortocentrul triunghiului ADE și fie punctele $A' = \text{pr}_{DE}A$, $D' = \text{pr}_{AE}D$ și $E' = \text{pr}_{AD}E$. Este ușor de văzut că $A' \in \mathcal{C}_1$, $D_1 \in \mathcal{C}_2$ și $E' \in \mathcal{C}_3$.

Folosind lema stabilită, rezultă: $HA \cdot HA' = HD \cdot HD' = HE \cdot HE'$. Aceste egalități arată că punctul H are puteri egale față de cercurile $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ și \mathcal{C}_3 .

Fie d_{ij} axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j$ ($i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$). Din egalitatea $HA \cdot HA' = HD \cdot HD'$ rezultă $H \in d_{12}$, iar din egalitatea $HD \cdot HD' = HE \cdot HE'$ se obține $H \in d_{23}$. Deoarece $d_{12} \perp d$ și $d_{23} \perp d$, iar din punctul H se poate duce o singură perpendiculară pe dreapta d , rezultă că dreptele d_{12} și d_{23} coincid. Atunci: $d_{12} = d_{23} = d_{13} = d' \perp d$.

S-a demonstrat că $H \in d'$. Analog se arată că ortocentrele triunghiurilor BEC , DCF și ABF se află pe dreapta d' . Dreapta d' pe care se află cele patru ortocentre se numește dreapta lui Aubert.

2.5 Dreapta antiortică

Se consideră un triunghi neisoscel ABC . Bisectoarea exterioară corespunzătoare vârfului A intersectează dreapta BC în punctul A' . Analog se obțin punctele B' și C' . Atunci punctele A', B' și C' se găsesc pe o aceeași dreaptă (numită dreaptă antiortică a triunghiului ABC).

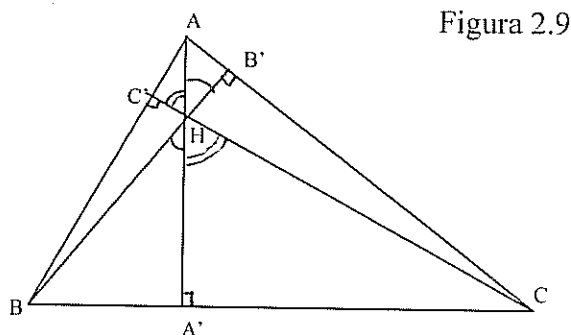


Figura 2.9

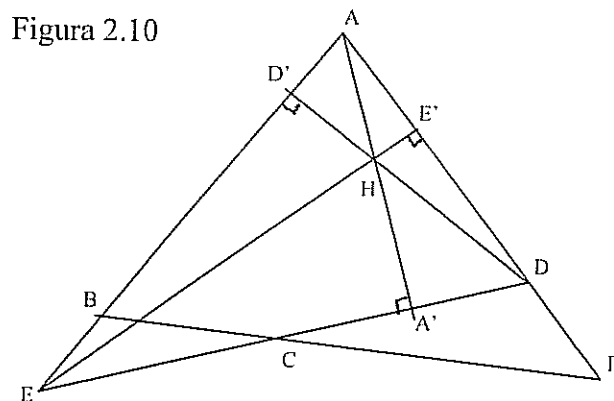
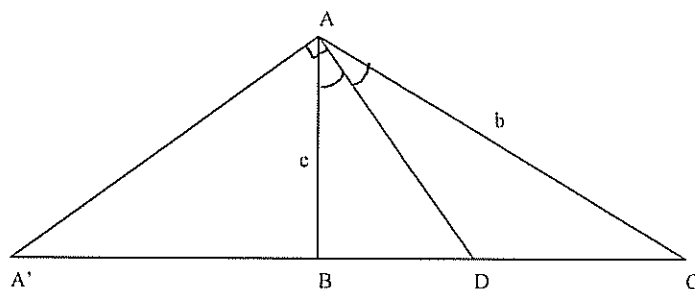


Figura 2.10

Demonstrație (Figura 2.11).

Fie a , b , c lungimile laturilor triunghiului. Conform teoremei bisectoarei unghiului exterior, rezultă $A'B/A'C=c/b$. Analog se obțin egalitățile: $B'C/B'A=a/c$ și $C'A/C'B=b/a$. Înmulțind ultimele trei relații, se obține: $A'B/A'C \cdot B'C/B'A \cdot C'A/C'B=1$ și folosind reciproca teoremei lui Menelau (pentru triunghiul ABC și punctele A' , B' , C' situate pe prelungirea laturilor triunghiului) se obține că punctele A' , B' , C' sunt coliniare.

Figura 2.11



2.6 Axa de omologie

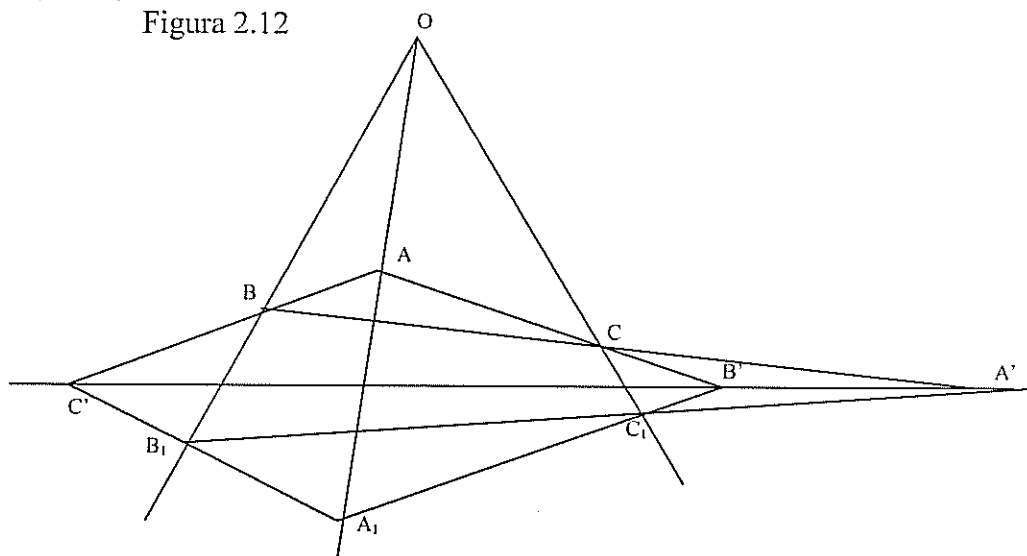
Teorema lui Desargues

Fie ABC și $A_1B_1C_1$ două triunghiuri cu proprietatea că există punctele A' , B' , C' astfel încât $\{A'\}=BC \cap B_1C_1$, $\{B'\}=CA \cap C_1A_1$, $\{C'\}=AB \cap A_1B_1$. Dacă dreptele AA_1 , BB_1 și CC_1 sunt concurente, atunci punctele A' , B' , C' sunt coliniare. (Dreapta $B'C'$ se numește axă de omologie, iar punctul O centru de omologie al triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$.)

Demonstrație (Figura 2.12).

Se notează cu O punctul de intersecție a dreptelor AA_1 , BB_1 și CC_1 , deci $\{O\}=AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1$

Figura 2.12



Se scrie teorema lui Menelau pentru triunghiul OBC și punctele coliniare A' , C_1 , B_1 . Atunci: $(|A'B|/|A'C|) \cdot (|C_1C|/|C_1O|) \cdot (|B_1O|/|B_1B|)=1$. Permutând circular A , B , C și A' , B' , C' se obțin alte două relații analoge: $(|B'C|/|B'A|) \cdot (|A_1A|/|A_1O|) \cdot (|C_1O|/|C_1C|)=1$, $(|C'A|/|C'B|) \cdot (|B_1B|/|B_1O|) \cdot (|A_1O|/|A_1A|)=1$. Înmulțind ultimele trei egalități, se obține: $(|A'B|/|A'C|) \cdot (|B'C|/|B'A|) \cdot (|C'A|/|C'B|)=1$.

Punctele A' , B' , C' se află pe prelungirile laturilor triunghiului ABC . Aplicând reciproca teoremei lui Menelau, rezultă că punctele A' , B' , C' sunt coliniare.

Reciproca teoremei lui Desargues

Se consideră două triunghiuri ABC și $A_1B_1C_1$ cu proprietatea că există punctele A' , B' , C' astfel încât:

$$\{A'\}=BC \cap B_1C_1, \{B'\}=AC \cap A_1C_1, \{C'\}=AB \cap A_1B_1$$

Se mai presupune că dreptele AA_1 și BB_1 nu sunt paralele. Dacă punctele A' , B' , C' sunt coliniare, atunci dreptele AA_1 , BB_1 și CC_1 sunt concurente.

Demonstrație (Figura 2.13)

Se notează cu O punctul de intersecție a dreptelor AA_1 și BB_1 . Se observă că triunghiurile $A'B B_1$ și $B' A A_1$ au vârfurile pe trei drepte concurente în punctul C' și anume $AB \cap A_1 B_1 \cap A' B' = \{C'\}$.

Conform teoremei lui Desargues, dreptele suport ale laturilor triunghiurilor $A' B_1 B$ și $B' A A_1$ se intersectează două câte două în trei puncte coliniare O , C , C_1 unde $\{O\} = AB \cap A_1 B_1$, $\{C\} = A' B \cap B' A$, $\{C_1\} = B' A_1 \cap A' B_1$.

Am obținut că dreapta CC_1 conține punctul O . Prin urmare dreptele AA_1 , BB_1 , CC_1 sunt concurente în punctul O . Un caz particular important este cel al triunghiurilor înscris unul în altul. În acest caz dreapta $B'C'$ se numește polară trilineară iar punctul O pol trilinear.

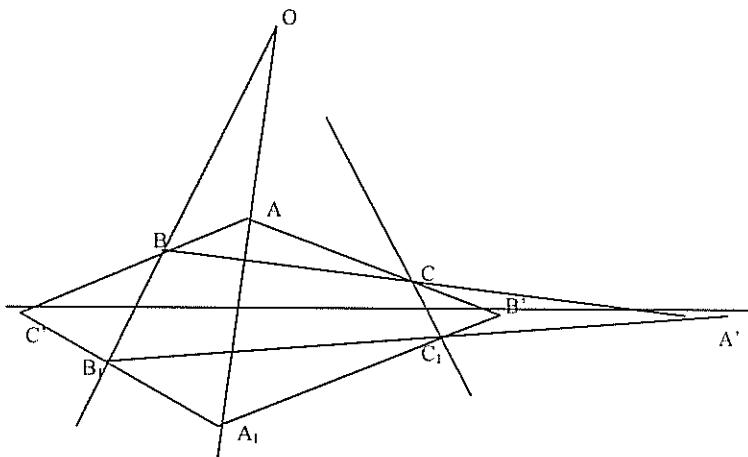


Figura 2.13

2.7 Relația lui Euler

Fie $C(I, r)$ și $C(O, R)$ cercul înscris și respectiv circumscris triunghiului ABC . Atunci există relația lui Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Demonstrație

Fie D punctul în care bisectoarea $[AI]$ intersectează cercul circumscris triunghiului și fie punctele E, F astfel încât $\{E, F\} = C(O, R)$ intersectează dreapta OI . Din triunghiul ABD rezultă:

$$BD = 2R \sin \frac{A}{2}, \text{ iar din triunghiul}$$

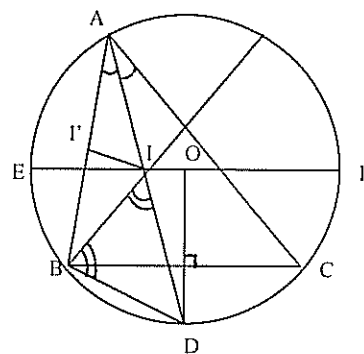
dreptunghic $AI'I$ rezultă $AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}$ (Figura

2.14). Deoarece $[AI]$ și $[BI]$ sunt biseatoare ale unghiurilor $\angle BAC$ și $\angle ABC$, se obține ușor relația $BD = ID$.

Folosind puterea punctului I față de cercul $C(O, R)$, din ultimele relații rezultă:
 $2Rr = ID \cdot IA = IE \cdot IF = (R - IO)(R + IO) = R^2 - IO^2$ deci
 $IO^2 = R^2 - 2Rr$

Privitor la relația lui Euler – care leagă distanța dintre centrele cercului înscris și cel al cercului circumscris ale unui triunghi de razele lor, adevărul este că ea se datorează lui W. Chaple, a cărei expresie a publicat-o în 1746, pe când L. Euler (căreia îi găsisese, de altfel, altă formă) a comunicat-o în 1765.

Figura 2.14



2.8 Dreapta lui Euler

Teoremă (Euler)

În orice triunghi ABC ortocentrul, centrul de greutate și centrul cercului circumscris triunghiului sunt situate pe aceeași dreaptă (numită dreapta lui Euler).

Demonstrație1 (Figura 2.15)

Fie A' mijlocul segmentului $[BC]$ și A'' punctul diametral opus lui A , iar O centrul cercului circumscris. Deoarece $[BH] \parallel [CA'']$ și $[CH] \parallel [BA'']$ rezultă că patrulaterul $BHCA''$ este paralelogram; A' este mijlocul $[HA'']$, deci $[OA'] \parallel [AH]$ și $OA' = \frac{1}{2}AH$. Fie $\{G\} = [HO] \cap [AA']$.

Este evident că triunghiurile AHG și $A'OG$ sunt asemenea,

raportul de asemănare fiind $\frac{AH}{OA'} = 2$. Rezultă

că $AG = 2GA'$, ceea ce ne arată că G este tocmai centrul de greutate al triunghiului ABC . Prin urmare punctele H , G și O sunt coliniare și $HG = 2GO$

Figura 2.15

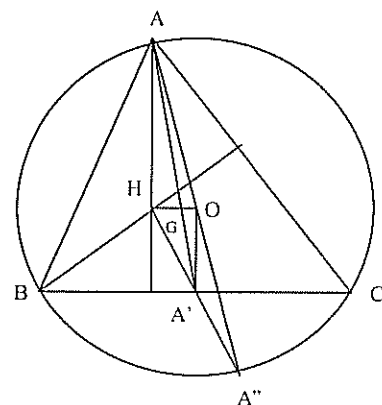
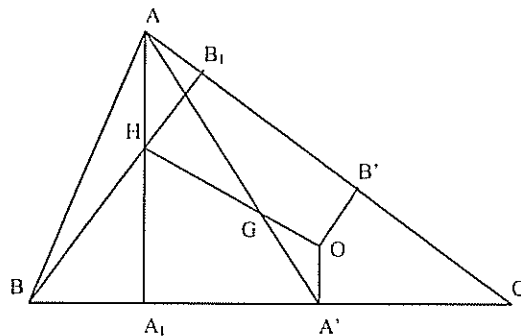


Figura 2.16

Demonstrație 2

Fie A' mijlocul laturii $[BC]$, A_1 proiecția lui A pe dreapta BC . Analog punctele B' și B_1 (Figura 2.16). Triunghiurile AHB și $A'OB'$ sunt asemenea (ca triunghiuri ce au laturile paralele). Deoarece $\frac{AB}{A'B'} = 2$,

rezultă $\frac{AH}{OA'} = 2$. Se unesc G cu H și G cu O .



Pentru a arăta că $\angle HGA \equiv \angle OGA'$ se observă că $\frac{AG}{GA'} = 2$, G fiind centrul de greutate, iar

$\angle HAG \equiv \angle GA'O$, deci triunghiurile AHG și $GA'O$ sunt asemenea.

Rezultă că semidreptele $[GH]$ și $[GO]$ sunt în prelungire. În plus $HG = 2GO$.

2.9 Cercul medial sau cercul lui Euler

1.7 Teorema (Euler) Mijloacele laturilor unui triunghi, picioarele înălțimilor și mijloacele segmentelor ce unesc fiecare vârf cu ortocentrul triunghiului sunt situate pe un același cerc (numit cercul celor 9 puncte, cercul lui Euler).

Demonstrație

Se analizează cazul unui triunghi ascuțitunghic. Fie A' , B' , C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ și fie $A_1 = pr_{BC}A$, $B_1 = pr_{AC}B$, $C_1 = pr_{AB}C$ (Figura 2.17).

Se arată că punctul A_1 aparține cercului ce trece prin A' , B' , C' . Deoarece $[B'C'] \parallel [A_1A']$, rezultă că patrulaterul $A'B'C'A_1$ este trapez. Din faptul că $[A'B']$ este linie mijlocie în triunghiul ABC , rezultă $A'B' = \frac{1}{2}AB$.

În triunghiul dreptunghic AA_1B , $[A_1C']$ este mediană, deci $A_1C' = \frac{1}{2}AB$. Rezultă $[A_1C'] = [A'B']$, adică $A'B'C'A_1$ este trapez isoscel.

Prin urmare A_1 aparține cercului determinat de A' , B' , C' . Analog se arată că punctele B_1 și C_1 aparțin cercului ce trece prin punctele A' , B' , C' .

Se demonstrează în continuare că punctul A'_1 , mijlocul segmentului $[AH]$, aparține cercului determinat de punctele A' , B' , C' . Pentru aceasta se demonstrează că patrulaterul $A'_1C'A'B'$ este inscriptibil. Este suficient să se arate că $\angle(A'_1C'A') = 90^\circ$, analog dovedindu-se că $\angle(A'_1B'A') = 90^\circ$. Este ușor de văzut că $[C'A'_1]$ este linie mijlocie în triunghiul ABH , deci $[C'A'_1] \parallel [BH]$. Cum dreptele BH și AC sunt perpendiculare și $[A'C'] \parallel [AC]$, rezultă $[C'A'_1] \perp [A'C']$. Prin urmare patrulaterul $A'_1C'A'B'$ este inscriptibil, adică A'_1 se află pe cercul ce trece prin punctele A' , B' , C' .

Analog se arată că mijloacele B'_1 și C'_1 ale segmentelor $[BH]$ și $[CH]$ se află pe cercul determinat de punctele A' , B' , C' .

Observație. Din demonstrație rezultă că $[A'_1A']$ este diametru în cercul lui Euler. Rezultă că dreptele A'_1A' , B'_1B' , C'_1C' sunt concurente.

Se prezintă în continuare o altă demonstrație a teoremei. Pentru aceasta se vor folosi trei leme:

Lema 1. Locul geometric al mijlocului N al segmentului $[HM]$, unde H este un punct fix iar M descrie un cerc $\mathcal{C}(O, R)$ este un cerc.

Demonstrație (Figura 2.18)

Deoarece punctele O și H sunt fixe, rezultă că și mijlocul ω al segmentului $[OH]$ este un punct fix. În plus, $\omega N = \frac{1}{2}OM = \frac{1}{2}R = \text{constant}$. Rezultă că punctul N descrie cercul $\mathcal{C}(\omega, \frac{R}{2})$.

Lema 2

Simetricul ortocentrului H al triunghiului ABC față de mijlocul unei laturi se află pe cercul circumscris triunghiului.

Demonstrație. Fie A' mijlocul segmentului $[BC]$ și A'' punctul diametral opus lui A (Figura 2.19).

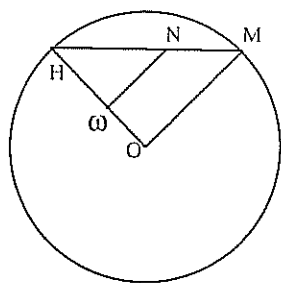


Figura 2.18

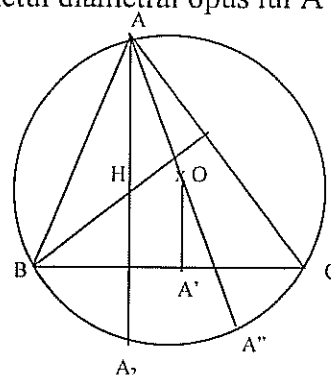


Figura 2.19

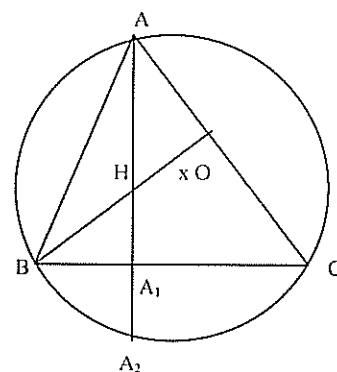
Deoarece $[HB] \parallel [CA'']$ și $[HC] \parallel [BA'']$ rezultă că patrulaterul $BHCA''$ este paralelogram, deci simetricul lui H față de mijlocul A' al laturii $[BC]$ se află pe cercul circumscris triunghiului.

Lema 3

Simetricul ortocentrului H al triunghiului ABC față de una din laturi se află pe cercul circumscris triunghiului.

Demonstrație. Notăm A_2 punctul în care înălțimea AA_1 intersectează cercul circumscris triunghiului (Figura 2.20). Deoarece $m(\angle HBA_1) = 90^\circ - m(\angle BCA) = 90^\circ - m(\angle BA_2A) = m(\angle A_2BA_1)$ rezultă $HA_1 = A_1A_2$.

Figura 2.20



A doua demonstrație a teoremei lui Euler

Se folosesc lemele 1, 2, 3. Se știe că locul geometric al mijlocului segmentului $[HM]$ (unde H este ortocentrul triunghiului, iar M un punct variabil pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$), este $\mathcal{C}(\omega, \frac{R}{2})$, unde ω este mijlocul segmentului $[OH]$. Fie A_1' mijlocul segmentului $[AH]$. Se consideră M în pozițiile A, A_2, A'' (și analoagele). Se obține că mijloacele A_1', A_1 și A' ale segmentelor $[HA], [HA_2]$ și $[HA'']$ aparțin cercului $\mathcal{C}(\omega, \frac{R}{2})$. Prin urmare cele nouă puncte (A', A_1, A_1' și analoagele) sunt situate pe același cerc (numit cercul lui Euler sau cercul celor nouă puncte).

Observații

1. Cercul medial taie laturile triunghiului sub unghiuri egale cu $\hat{A} - \hat{B}, \hat{B} - \hat{C}, \hat{C} - \hat{A}$.

Avem, (Figura 2.21), $\angle H_a B' A' = \angle H_a B' C = \angle A' B' C$

$$= 2(\pi/2 - \hat{C}) - \hat{A} = \pi - 2\hat{C} - \hat{A} = \hat{B} - \hat{C}$$

2. Tangentele în A', B', C' la cercul medial sunt antiparalele cu laturile triunghiului de referință.

Această proprietate rezultă din precedenta.

3. Triunghiurile AHB, BHC și CHA au același cerc medial ca și triunghiul ABC , pentru că cercul medial trece prin mijloacele segmentelor $[AH], [BH]$ și $[CH]$.

4. Cercurile AHB, BHC și CHA sunt egale cu cercul circumscris. Unghiul $\angle BHC$, de exemplu, este egal cu $\pi - \hat{A}$; arcul de cerc BHC este deci capabil de același unghi descris pe aceeași latură $[BC]$ ca și cercul ABC .

5. Punctele A, B, C, H se bucură de proprietatea remarcabilă că unul dintre ele este ortocentrul triunghiului format de celelalte trei. Se zice că ele formează o grupare ortocentrică.

6. Raza $[OA]$ și înălțimea $[AH]$ (Figura 2.21) sunt simetrice în raport cu bisectoarea, căci $\angle A''AH_a = \angle OA''A = \angle OAA''$

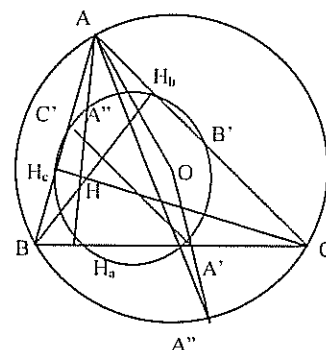
7. Unghiul $\angle HAO$ este egal cu $\hat{B} - \hat{C}$, căci $\angle HAO = \angle A - 2\angle BAH_a = \hat{A} - 2(\pi/2 - \hat{B}) = \hat{B} - \hat{C}$

8. Există o infinitate de triunghiuri înscrise în același cerc și care au același ortocentrul H . Este suficient de a duce prin H o coardă $[AA']$ și prin mijlocul lui $[HA']$ o coardă $[BC]$ perpendiculară pe dreapta AA' . Triunghiul ABC răspunde la întrebare.

Aceste triunghiuri au același centru de greutate și același cerc medial deoarece au același O și H .

9. Unghiul $\angle BOC = 2\hat{A}$, căci este unghiul la centru, căruia îi corespunde unghiul înscris $\angle BAC$.

Figura 2.21



10. Raza $[OA]$ este perpendiculară pe direcția antiparalelă dreptei BC ; ea rezultă imediat din faptul că $\angle BAO = \pi/2 - \hat{C}$

11. Fie ABC și DEF două triunghiuri, M, N, P mijloacele segmentelor $[AD], [BE],$ și $[CF]$. Centrul de greutate al triunghiului MNP este la mijlocul lui $[G_1G_2]$ (G_1 centrul de greutate al $\triangle ABC$, G_2 centrul de greutate al $\triangle DEF$), căci linia frântă pe care o închide centrul de greutate al $\triangle MNP$ are laturile sale respectiv paralele și egale cu jumătățile acestora care se închid în centrul de greutate al triunghiului $\triangle DEF$. Cu o formulare mai generală, dacă punctele M, N, P împart $[AD], [BE], [CF]$ în același raport k , atunci centrul de greutate al lui MNP împarte pe $[G_1G_2]$ în același raport k .

12. Triunghiul median. Se numește astfel triunghiul MNP format din medianele triunghiului de referință ABC ca laturi. Triunghiul median MNP este asemenea cu triunghiul de referință ABC ; raportul său de asemănare este $3/4$.

2.10 Dreapta lui Simson

Semnalăm că, dreapta lui Simson (Proiecțiile pe laturile unui triunghi ABC ale unui punct M situat pe cercul circumscris sunt trei puncte A', B', C' coliniare) este atribuită acestuia din greșeală, de către F. Servois (în anul 1813), ea a fost de fapt stabilită de W. Wallace (în anul 1799) iar despre R. Simson se face afirmația că nu s-a ocupat niciodată de această teoremă.

S-ar cuveni ca teorema să poarte numele lui W. Wallace și chiar L. Carnot, care a generalizat-o (în anul 1806), considerând în locul proiecțiilor ortogonale pe cele cu proiectante isocline.

Teorema lui Simson.

Proiecțiile ortogonale ale unui punct M de pe cercul circumscris triunghiului ABC pe laturile acestuia sunt coliniare.

Demonstrație.

Fie $A' = \text{pr}_{BC}M$, $B' = \text{pr}_{AC}M$, $C' = \text{pr}_{AB}M$ (Figura 2.22). Patrulaterul $AB'MC'$, $MB'A'C$, $ABCM$ sunt inscriptibile. Atunci:

$$m(\angle A'B'C) = m(\angle A'MC) =$$

$$90^\circ - m(\angle A'CM) =$$

$$90^\circ - m(\angle C'AM) = m(\angle C'MA) = m(\angle C'B'A)$$

Prin urmare s-a obținut $\angle (C'B'A) \equiv \angle (A'B'C)$, ceea ce arată că punctele A', B', C' sunt situate pe o aceeași dreaptă (numită dreapta lui Simson) a punctului M în raport cu triunghiul ABC .

Observație

Figura 2.22

Dacă perpendiculara din M pe latura $[BC]$ reiaie cercul circumscris triunghiului în punctul A'' , atunci dreapta AA'' este paralelă cu dreapta lui Simson a punctului M .

Într-adevăr:

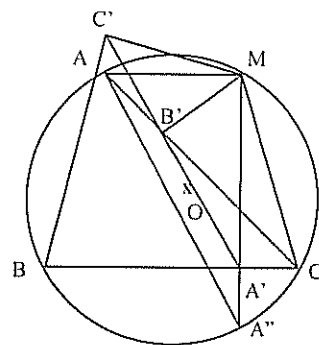
$$\angle AA''M \equiv \angle ACM$$

(din patrulaterul inscriptibil $MAA''C$),

$$\angle ACM \equiv \angle B'A'M$$

(din patrulaterul inscriptibil $B'A'MC$)

Rezultă $\angle AA''M = \angle B'A'M$, adică dreapta AA'' este paralelă cu dreapta Simson a punctului M în raport cu triunghiul ABC .



Reciproca teoremei lui Simson

Fie M un punct exterior triunghiului ABC și fie $A' = \text{pr}_{BC}M$, $B' = \text{pr}_{AC}M$, $C' = \text{pr}_{AB}M$. Dacă A', B', C' sunt coliniare, atunci M se află pe cercul circumscris triunghiului.

Demonstrație.

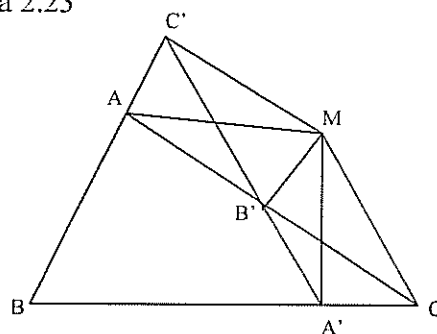
Deoarece punctele A' , B' , C' sunt coliniare rezultă $\sphericalangle A'B'C' \equiv \sphericalangle AB'C'$. Folosind patrulaterul inscriptibil $B'MC'A$ și $MB'A'C$ rezultă:

$$m(\sphericalangle A'B'C') = m(\sphericalangle A'MC) = 90^\circ - m(\sphericalangle MCB)$$

$$m(\sphericalangle AB'C') = m(\sphericalangle AMC') = 90^\circ - m(\sphericalangle C'AM)$$

Deoarece $m(\sphericalangle A'B'C') \equiv m(\sphericalangle AB'C')$ rezultă $\sphericalangle (MCB) \equiv \sphericalangle (C'AM)$ adică patrulaterul $ABCM$ este inscriptibil. (Figura 2.23)

Figura 2.23



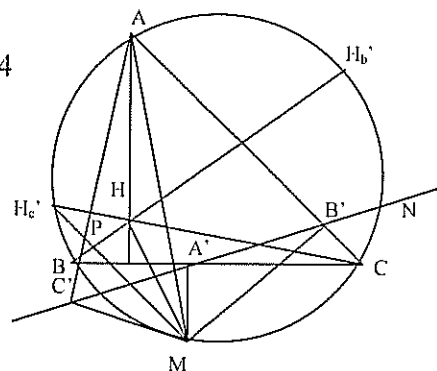
Observații

Fie H_a , H_b , H_c – fiecare al doilea punct de întâlnire al înălțimilor cu cercul circumscris (Figura 2.24).

Dreapta lui Simson al punctului M și dreapta MH_c au aceeași înclinare pe latura $[AB]$. Aceeași proprietate pentru toate laturile.

Va fi suficient să arătăm că unghiurile $\sphericalangle (MC'A')$ și $\sphericalangle (MH_cC)$ sunt egale. Patrulaterul inscriptibil $AC'MB'$ ne dă $\sphericalangle (MC'A') \equiv \sphericalangle (MAC)$. Însă în cercul circumscris avem: $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MH_cC$, deci $\sphericalangle (MC'A') = \sphericalangle (MH_cC)$.

Figura 2.24



2. Dreapta lui Simson a unui punct M împarte în două părți egale segmentul care unește M cu ortocentrul.

Fie P punctul unde dreapta MH_c întâlnește $[AB]$. Potrivit rezultatului de mai sus, dreapta Simson este paralelă cu dreapta PH . Pe de altă parte, în triunghiul dreptunghic $MC'P$, dreapta lui Simson trecând prin vârful C' și fiind egal înclinată pe dreapta $C'N$ ca și ipotenuza $[MP]$, va trece prin mijlocul acestuia. Ea va trece deci și prin mijlocul lui $[MH]$.

3. Dreptele lui Simson a două puncte M și N fac între ele un unghi egal cu acela înscris în cercul circumscris, măsurat prin jumătatea arcului MN .

Într-adevăr potrivit observației 1, unghiul dreptelor Simson este egal cu $\sphericalangle (MH_cN)$.

4. Punct având ca dreaptă a lui Simson o perpendiculară pe o dreaptă de direcție dată.

Aceasta este punctul M' , diametral opus lui M . El se poate obține și astfel: se duce din A o perpendiculară pe direcția dată care întâlnește cercul circumscris în P' și apoi se duce din P' o perpendiculară pe dreapta BC , care întâlnește cercul în M' .

5. Dreptele Simson ale vârfurilor unui triunghi sunt înălțimile, căci picioarele perpendicularelor ridicate din A pe dreptele AB și AC coincid cu A , iar perpendiculara pe dreapta BA este înălțimea AH_a .

6. Dreptele lui Simson ale punctelor diametral opuse vârfurilor sunt laturile triunghiului, căci dacă A_1 este opusul lui A , unghiurile $\sphericalangle (ABA_1)$ și $\sphericalangle (ACA_1)$ sunt drepte.

7. Dreptele lui Simson ale punctelor de intersecție a înălțimilor cu cercul ABC sunt paralele cu tangentele în A , B , C la cercul circumscris și trec prin vârfurile triunghiului ortic, pentru că dreapta AH_a este perpendiculară pe dreapta BC ; trebuie deci să ducem tangenta în A pentru a avea direcția dreptei Simson a dreptei AH_a . Aceste drepte Simson formează deci triunghiul antimedial al triunghiului ortic.

8. Dreptele lui Simson ale punctelor A'' , B'' , C'' , picioarele bisectoarelor interioare pe cercul circumscris, trec prin A' , B' , C' , mijloacele laturilor respective, și sunt perpendiculare pe aceste bisectoare.

Într-adevăr, piciorul perpendicularei coborâte din A'' pe dreapta BC este A' ; pe de altă parte A'' fiind bisectoarea interioară, dreapta care unește proiecțiile sale pe dreptele AB și AC va fi perpendiculară pe această bisectoare.

9. Dreptele lui Simson ale picioarelor bisectoarelor exterioare de pe cerc trec de asemenea prin mijloacele laturilor respective și sunt paralele cu bisectoarele interioare, căci aceste puncte sunt diametral opuse celor de la observația anterioară.

Teorema lui Simson generalizată

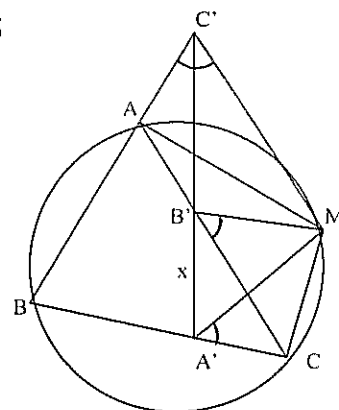
Fie M un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC și fie $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (BA)$. Dacă $\sphericalangle (MC'A) \equiv \sphericalangle (MB'C) \equiv \sphericalangle (MA'C)$, atunci punctele A' , B' , C' sunt coliniare.

Demonstrație (Figura 2.25)

Patruleterele $ABCM$, $AB'MC'$ și $A'B'MC$ sunt inscriptibile. Se unesc A' cu B' și B' cu C' . Atunci:

$\sphericalangle (C'B'M) \equiv \sphericalangle (C'AM) \equiv \sphericalangle (MCB)$. Rezultă $m(\sphericalangle A'B'M) + m(\sphericalangle MB'C') = m(\sphericalangle A'B'M) + m(\sphericalangle MCB) = 180^\circ$. Prin urmare punctele A' , B' , C' sunt coliniare.

Figura 2.25



2.11 Triunghiurile S. Proprietăți remarcabile.

O contribuție românească frustrată de reala ei paternitate o constituie triunghiurile S- perechea de triunghiuri înscrise în același cerc, având proprietatea că dreapta Simson a fiecărui vârf al unuia în raport cu celălalt triunghi este perpendiculară pe latura opusă vârfului considerat, cele șase drepte Simson fiind concurente.

Primele proprietăți ale acestor triunghiuri au fost stabilite de Traian Lalescu, în articolul "O clasă de triunghiuri remarcabile" (publicată în "Gazeta matematică", vol. XX, 1915).

Cu modestia caracteristică oamenilor de valoare, Lalescu le-a numit "triunghiuri S" (denumire sugerată de corelarea acestora cu dreapta Simson).

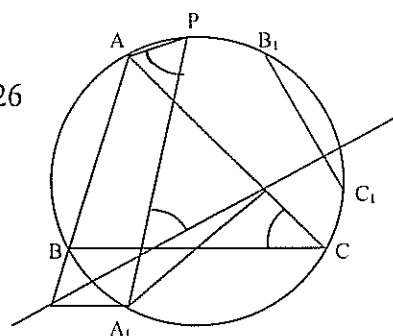
Unii cercetători, fără a aminti de autorul lor, le-au intitulat totuși "triunghiuri ortopolare" dar, comunicarea lui Lalescu – dovada cea mai autentică – îi asigură prioritatea introducerii acestor triunghiuri și a primelor lor proprietăți.

Să considerăm două puncte oarecare B_1 și C_1 ale cercului circumscris. Fie A_1 punctul a cărui dreaptă a lui Simson este perpendiculară pe dreapta B_1C_1 . Triunghiul $A_1B_1C_1$ se bucură de câteva proprietăți remarcabile.

1. Suma algebrică a arcelor AA_1 , BB_1 și CC_1 luate pe cercul pe care s-a fixat un sens de parcurs este egală cu zero.

Într-adevăr, unghiul $\sphericalangle (APA_1)$ este egal cu unghiul dintre dreptele BC și B_1C_1 deci arcul $AA_1 = \text{arc } BB_1 - \text{arc } CC_1$, în cazul figurii 2.26. Pe de altă parte, se vede că arcul BB_1 este de sens contrar cu arcele AA_1 și CC_1 . Aceeași demonstrație pentru celelalte poziții posibile ale punctelor B_1 și C_1 pe cerc.

Figura 2.26



2. Dreapta Simson a fiecărui vârf al triunghiului $A_1B_1C_1$ este perpendiculară pe latura opusă. Într-adevăr, din observația 1 rezultă că dacă se caută punctul a cărui dreaptă a lui Simson este perpendiculară pe dreapta A_1C_1 se găsește B_1 .

3. Dreptele lui Simson ale vârfurilor triunghiului $A_1B_1C_1$ sunt concurente. Fie D , E și F mijloacele segmentelor $[HA_1]$, $[HB_1]$, $[HC_1]$. Dreptele lui Simson ale punctelor A_1 , B_1 și C_1 sunt înălțimile triunghiului DEF . Triunghiurile $A_1B_1C_1$ sunt singurele care se bucură de această proprietate; noi vom spune că sunt triunghiuri S .

4. Relația dintre triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ este reciprocă: triunghiul ABC este un triunghi S în raport cu $A_1B_1C_1$; aceasta rezultă din observația 1.

5. Punctul de întâlnire al dreptelor Simson pentru cele două triunghiuri este mijlocul ω al dreptei care unește ortocentrele H și H' ale triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$.

Într-adevăr, punctul de întâlnire este ortocentrul triunghiului DEF , care este omotetic lui $A_1B_1C_1$ în raport cu H . Deci el se va găsi pe $[HH']$ și în mijlocul său.

6. Triunghiurile S formează cu triunghiul ABC o familie de triunghiuri. Două, oricare, din triunghiurile familiei sunt triunghiuri S , unul în raport cu celălalt.

Fie $P_aP_bP_c$ și $Q_aQ_bQ_c$ două triunghiuri S în raport cu ABC . Avem $\text{arc } AP_a + \text{arc } BP_b + \text{arc } CP_c = 0$; $\text{arc } AQ_a + \text{arc } BQ_b + \text{arc } CQ_c = 0$, de unde, prin scădere, $\text{arc } P_aQ_a + \text{arc } P_bQ_b + \text{arc } P_cQ_c = 0$, ceea ce arată că triunghiurile P și Q sunt de asemenea triunghiuri S , unul în raport cu celălalt.

7. Ortopol. Se proiectează cele trei vârfuri ale triunghiului ABC pe o dreaptă d în A_1 , B_1 , C_1 . Perpendicularele coborâte din A_1 , B_1 și C_1 pe laturile opuse respectiv dreptele BC , CA și BA ale triunghiului se întâlnesc în același punct ω .

Acesta este punctul de intersecție al dreptelor Simson ale punctelor de intersecție dintre dreapta d și cercul circumscris lui ABC . Perpendicularele sunt drepte ale lui Simson ale triunghiului ABC , în raport cu triunghiul S a cărui una din laturi este dreapta d . Punctul ω este adesea numi ortopolul dreptei d .

8. Triunghiuri formate din drepte Simson.

Să considerăm un triunghi $A_1B_1C_1$ înscris în același cerc cu triunghiul de referință ABC . Dreptele $\Delta(A_1)$, $\Delta(B_1)$, $\Delta(C_1)$ ale vârfurilor A_1 , B_1 și C_1 în raport cu triunghiul ABC formează un alt triunghi $A'B'C'$. Indicăm câteva proprietăți ale acestuia.

a). Triunghiul $A'B'C'$ este asemenea cu $A_1B_1C_1$; unghiul format de $\Delta(B_1)$ și $\Delta(C_1)$ este egal cu $\sphericalangle B_1H_aC_1 = \sphericalangle A_1$, căci direcțiile dreptelor Simson $\Delta(B_1)$, $\Delta(C_1)$ și direcțiile B_1H_a , C_1H_a sunt respectiv simetrice în raport cu latura $[BC]$.

b). Centrul cercului circumscris lui $A'B'C'$ este mijlocul ω al dreptei care unește ortocentrele H și H' ale triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$.

Într-adevăr, fie D , E și F mijloacele segmentelor $[HA_1]$, $[HB_1]$ și $[HC_1]$. Triunghiul DEF este omotetic cu $A_1B_1C_1$; ortocentrul său este ω , mijlocul lui HH' . Dar triunghiul $A'B'C'$ este circumscris triunghiului DEF și asemenea cu el. Deci, punctele α , β și γ se găsesc pe cercurile care trec prin vârfurile triunghiului $A'B'C'$ și prin ortocentrul său ω . Deci ω este centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$.

c). Ortopolul unui diametru TT' al cercului circumscris se găsește pe cercul medial, căci el este intersecția dreptelor Simson perpendiculare $\Delta(T)$ și $\Delta(T')$.

Teorema lui Salmon

Pe un cerc se consideră punctele A , B , C , M . Cercurile de diametre $[MA]$, $[MB]$ și $[MC]$ se întâlnesc două câte două în trei puncte coliniare.

Demonstrație.

Fie B' al doilea punct de intersecție al cercurilor de diametre $[MA]$ și $[MC]$. Deoarece $m\angle (AB'M) = m\angle (MB'C) = 90^\circ$, rezultă că B' este proiecția punctului M pe dreapta AC .

Fie C' (respectiv A') al doilea punct de intersecție al cercului de diametru $[MB]$ cu cercul de diametru $[MA]$ (respectiv $[MC]$).

Se obțin analog punctele C' , proiecția punctului M pe dreapta AB și A' proiecția punctului M pe dreapta BC . Folosind teorema lui Simson rezultă că punctele A' , B' și C' sunt coliniare.

2.12 Teorema lui Lalescu

Fie ABC și $A_1B_1C_1$ două triunghiuri înscrise în cercul $\mathcal{C}(O, R)$. Dacă dreapta lui Simson a punctului A_1 în raport cu triunghiul ABC este perpendiculară pe dreapta B_1C_1 atunci:

- această proprietate este adevărată pentru toate vârfurile triunghiului $A_1B_1C_1$;
- dreptele Simson ale vârfurilor triunghiului ABC în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$ sunt perpendiculare pe laturile triunghiului ABC .

Demonstrație (Figura 2.27)

Fie $\mathcal{C}(O, R)$ cercul circumscris triunghiului ABC și fie $B_1, C_1 \in \mathcal{C}(O, R)$. Perpendiculara din A pe dreapta B_1C_1 reiaie cercul în A_2 . Perpendiculara din A_2 pe latura $[BC]$ reiaie cercul $\mathcal{C}(O, R)$ în A_1 . Conform proprietății: dacă perpendiculare din M pe latura $[BC]$ reiaie cercul circumscris triunghiului în punctul A'' atunci dreapta AA'' este paralelă cu dreapta lui Simson a punctului M , dreapta AA_2 este paralelă cu dreapta Simson a punctului A_1 în raport cu triunghiul ABC .

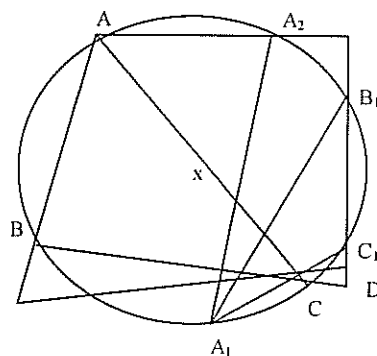


Figura 2.27

Cum dreapta AA_2 este perpendiculară pe dreapta B_1C_1 , rezultă că dreapta Simson al punctului A_1 în raport cu triunghiul ABC este perpendiculară pe dreapta B_1C_1 .

S-au construit astfel triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ care îndeplinesc condiția din ipoteza teoremei lui Salmon. Fie $\{D\}$ punctul de intersecție al dreptelor BC și B_1C_1 .

Este ușor de văzut că $\sphericalangle(B_1DB) \equiv \sphericalangle(AA_2A_1)$ deci măsura arcului AA_1 este egal cu măsura arcului AB_1 și măsura arcului CC_1 . Dacă se iau arcele în același sens, atunci: măsura arcului BAB_1 este egal cu diferența dintre 360° și măsura arcului BCB_1 .

Folosind ultimele două egalități și făcând abstracție de un multiplu de 360 , rezultă:

$$(*) \quad m(AA_1) + m(BB_1) + m(CC_1) = 0^\circ$$

i) Deoarece relația $(*)$ este simetrică în A_1, B_1, C_1 , rezultă că și dreapta Simson a vârfului B_1 este perpendiculară pe dreapta A_1C_1 și de asemenea dreapta Simson a vârfului C_1 este perpendiculară pe dreapta A_1B_1 .

ii) Este evident că relația $(*)$ este simetrică pentru triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$. Rezultă că și dreapta Simson a vârfului A în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$ este perpendiculară pe dreapta BC .

2.13 Drepte izogonale

Se spune că dreptele CM și CM' sunt izogonale în raport cu unghiul C dacă ele fac același unghi cu laturile acestuia, sau, altfel spus, două drepte izogonale sunt egal înclinate pe bisectoarea unghiului.

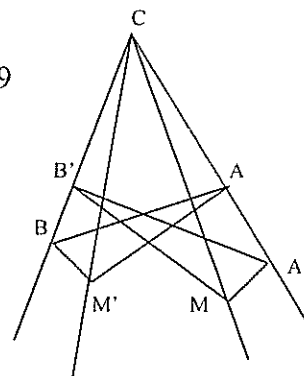
Proprietăți.

Să luăm două puncte M și M' (Figura 2.29) situate pe două drepte izogonale și să le proiectăm respectiv în A, B și A', B' pe laturile unghiului C . Avem:

1. Triunghiurile MAB , $M'A'B'$ sunt asemenea.

Într-adevăr, patrulateralele $MACB$ și $M'A'C'B'$ fiind inscriptibile, avem: $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM$; $\sphericalangle B'A'M' = \sphericalangle M'CB'$ dar $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BCM'$, deci $\sphericalangle ABM = \sphericalangle B'A'M'$. Se vede de asemenea că: $\sphericalangle MAB = \sphericalangle M'B'A'$ și deci triunghiurile MAB , $M'B'A'$ sunt asemenea.

Figura 2.29



2. Avem relația $MA \cdot M'A' = MB \cdot M'B'$, care rezultă din asemănarea triunghiurilor MAB , $M'A'B'$.

3. Dreptele AB și $A'B'$ sunt antiparalele. Într-adevăr, unghiurile $\sphericalangle CBA$, $\sphericalangle CB'A'$ sunt egale pentru că unghiurile lor complementare sunt egale.

4. Patrulaterul $ABA'B'$ este inscriptibil, căci dreptele AB și $A'B'$ sunt antiparalele.

5. O dreaptă AB este perpendiculară pe cealaltă izogonală CM' , pentru că unghiurile $\sphericalangle M'CB$, $\sphericalangle ABC$ sunt complementare.

2.14. Simediana

Definiție

Izogonala unei mediane se numește simediană.

Teoremă (L'Huilier)

Simediana este locul mijloacelor antiparalelelor la latura opusă. Într-adevăr, DE fiind paralelă cu latura BC (Figura 2.30), mijlocul său se găsește pe mediana AA' . Rotind figura în jurul bisectoarei unghiului \hat{A} , mediana se confundă cu simediana, laturile unghiului $\sphericalangle ABC$ se schimbă între ele și dreapta DE va lua poziția unei antiparalele, $D'E'$.

Proprietăți

1. Simediana este locul punctelor a căror distanțe la laturile adiacente sunt proporționale cu aceste laturi.

2. Dacă M este piciorul simediei pe BC , avem $MB/MC = c^2/b^2$.

Definiție

Se numește simediana exterioară unui vârf al triunghiului ABC locul punctelor exterioare triunghiului ale căror distanțe la laturile adiacente ale triunghiului sunt proporționale cu lungimile acestor laturi. Altfel spus, aceasta este raza conjugată armonic a simediei în raport cu unghiul corespunzător.

Proprietăți

1. Simediana exterioară este tangentă cercului circumscris (Figura 2.31).

Într-adevăr, fie M un punct oarecare de pe tangenta dusă în A la cercul circumscris, fie de asemenea y și z distanțele de la acest punct la laturile CA și AB . Avem $y = AM \cdot \sin B$, $z = AM \cdot \sin C$, deci $y/z = \sin B / \sin C = b/c$.

Figura 2.30

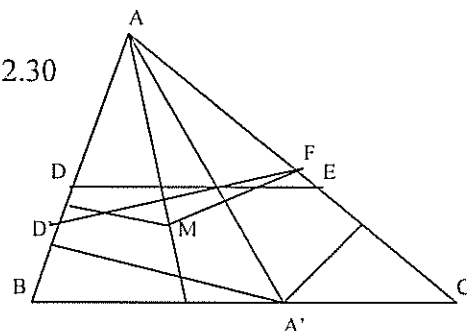
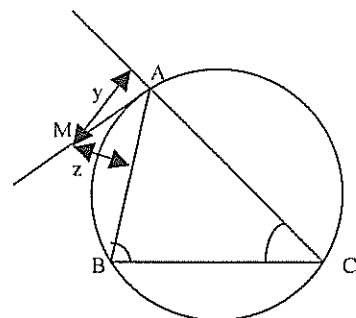


Figura 2.31



2. Simedianele interioare și exterioare ale unghiului A fiind conjugate armonic în raport cu acest unghi, rezultă că două simediane exterioare se întâlnesc pe o simediană interioară; altfel spus, o simediană interioară trece prin punctul de întâlnire al tangentelor cercului circumscris, duse prin celelalte vârfuri.

Coordonate

Introducem noțiunea de coordonate pentru a defini un anumit număr de elemente noi ale geometriei triunghiului.

Coordonatele unghiulare. Fie M un punct oarecare situat în planul triunghiului ABC numit triunghiul de referință. Unghiurile \sphericalangle (AMB), \sphericalangle (BMC), \sphericalangle (CMA) sunt numite coordonatele unghiulare ale punctului M. Semnul acestor coordonate este fixat prin regula următoare: dacă M și A sunt situate de aceeași parte a dreptei BC, coordonata \sphericalangle (BMC) este pozitivă; în caz contrar ea este negativă.

Coordonatele unghiulare verifică relația: \sphericalangle (AMB) + \sphericalangle (BMC) + \sphericalangle (CMA) = 2π . Această relație este evidentă atunci când punctul M este în interiorul triunghiului. Ea se verifică ușor în celelalte cazuri cu ajutorul convenției semnelor.

Coordonate normale. Se numesc coordonate normale ale unui punct M cantități proporționale cu distanțele de la punctul M la laturile triunghiului de referință ABC. Aceste coordonate nu sunt determinate decât până la un factor de proporționalitate. Convenția semnelor pentru distanță este următoarea: o distanță, după cum punctele M și A sunt situate, în raport cu BC de aceeași parte sau nu.

Distanțele x, y, z de la un punct M la laturile triunghiului verifică relația $ax+by+cz=2S$; a, b, c, S fiind laturile și aria triunghiului de referință.

Se verifică această identitate scriind că suma algebrică a ariilor triunghiurilor BMC, CMA, AMB este egală cu aria triunghiului ABC.

Un sistem (x, y, z) de trei coordonate normale determină poziția unui singur punct în raport cu triunghiul de referință. Această poziție este situată la intersecția dreptelor duse prin vârfurile A, B, C, locul punctelor a căror distanță la laturile adiacente sunt în mărime și în semn în raporturile de respectiv y/z, z/x, x/y. Două din aceste drepte sunt suficiente, căci a treia va trece neapărat prin punctul de intersecție al primelor două. Într-adevăr, să notăm prin d(M, AB) distanța de la un punct M la dreapta AB și fie M punctul de intersecție a primelor drepte; vom avea:

$d(M, AB)/z = d(M, AC)/y$; $d(M, AC)/y = d(M, BC)/x$ de unde $d(M, AB)/z = d(M, BC)/x$, ceea ce demonstrează că punctul M aparține celui de al treilea loc.

Puncte asociate. Fiecărui punct M(x, y, z) i se poate atașa punctele $M_a(-x, y, z)$, $M_b(x, -y, z)$, $M_c(x, y, -z)$, care au aceleași coordonate cu M în valoare absolută dar diferind prin semn.

Punctele M_a , M_b , M_c se numesc puncte asociate lui M. Să presupunem poziția punctului M(x, y, z) cunoscută în raport cu triunghiul de referință și să ne propunem să găsim punctele asociate. Avem pentru punctul M_a , de exemplu:

$$d(M_a, AB)/z = d(M_a, AC)/y \quad d(M_a, BC)/x = d(M_a, BA)/z \quad d(M_a, CA)/y = d(M_a, CB)/x.$$

Prima relație arată că punctul M_a se găsește pe dreapta AM, locul punctelor care satisfac relația $d(M, AB)/z = d(M, AC)/y$.

La fel, a doua relație dovedește că punctul M_a se găsește pe o dreaptă trecând prin B, locul punctelor al căror raport al distanțelor la dreptele BC și BA este același ca pentru punctele dreptei BM, dar de semn contrar. Această nouă dreaptă se numește dreaptă armonică a lui MB în raport cu unghiul \sphericalangle (ABC). Într-un mod analog, se vede că M_a aparține, de asemenea, dreptei armonice a lui MC.

Se poate spune deci: Punctele asociate ale unui punct M sunt vârfurile unui triunghi circumscris triunghiului ABC și format de razele armonice ale dreptelor MA , MB , MC , în raport cu laturile unghiurilor A , B , C ale triunghiului ABC .

Triunghiurile ABC , M_a , M_b , M_c sunt omologice și au ca centru de omologie punctul M .

Proprietatea punctelor M , M_a , M_b , M_c este comutativă: fiecare din aceste puncte are ca asociate celelalte puncte ale acestei mulțimi. Această proprietate este evidentă, căci permutările de semne pentru x , y , z dau numai aceste patru puncte.

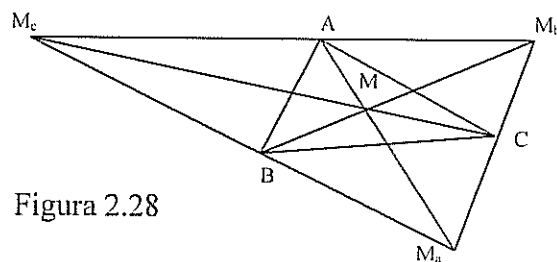


Figura 2.28

2.15 Aplicații

1. Se consideră două triunghiuri ABC și $A_1B_1C_1$ înscrise în același cerc. Dreptele Simson ale unui punct M de pe cerc, în raport cu cele două triunghiuri, fac un unghi constant, când M descrie cercul.

Fie D și D_1 punctele unde proiectantele lui M pe dreptele BC și B_1C_1 întâlnesc cercul: arcul DD_1 este constant, căci el măsoară unghiul dreptelor BC și B_1C_1 . Aceste drepte Simson ale lui M sunt paralele cu dreptele AD și A_1D_1 , de unde rezultă că unghiul dreptelor Simson ale lui M în raport cu triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ va fi egal cu cel măsurat de arcul DD_1 pe cercul circumscris.

2. Dreptele Simson ale unui punct M în raport cu două triunghiuri diametral opuse sunt perpendiculare.

Se poate deduce aceasta, direct, pe baza proprietății precedente; într-adevăr, perpendiculara ridicată din M pe dreptele BC și B_1C_1 este aceeași; ea întâlnește deci cercul în același punct N_1 ; de altă parte, dreptele NA și N_1A_1 sunt perpendiculare.

3. Fie $H_aH_bH_c$ triunghiul format de picioarele înălțimilor pe cercul circumscris. Dreptele Simson ale unui punct M în raport cu triunghiurile ABC și $H_aH_bH_c$ sunt perpendiculare.

Potrivit exercițiului 1, este de ajuns să considerăm un punct particular. Să luăm vârful A ; dreapta Simson a lui A , în raport cu ABC , este înălțimea HH_a . Pentru ca să obținem direcția dreptei Simson a punctului A , în raport cu triunghiul $H_aH_bH_c$ trebuie să ducem o perpendiculară din A pe dreapta H_bH_c , care este tocmai raza $[AO]$ a cercului circumscris. Fie HA'' punctul de întâlnire a acestei drepte cu cercul. Direcția căutată este H_aH_a'' , care este perpendiculară pe dreapta AH_a , căci unghiul $\angle AH_aH_a''$ este înscris într-un semicerc. Se poate observa de asemenea că triunghiul $H_aH_bH_c$ și triunghiul diametral opus triunghiului de referință aparțin aceleiași familii de triunghiuri S .

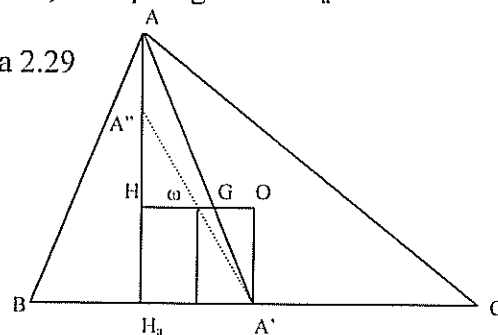
4. Proiecțiile a două vârfuri B , C pe bisectoarea lui A , mijlocul A' al lui $[BC]$ și piciorul H_a al înălțimii $[AH_a]$, sunt patru puncte conciclice. Centrul cercului este mijlocul L al arcului $A'H_a$ al cercului medial.

Se va arăta că unghiurile $\angle EH_aA'$ și $\angle FH_aA'$ sunt egale cu $\angle A/2$, din cauză că patrulateralele ABH_aE , ACH_aF sunt inscriptibile, de asemenea triunghiul $EA'F$ este isoscel căci unghiurile $\angle E$ și $\angle F$ sunt egale cu $\angle A/2$. Punctul L este egal depărtat de H_a și A' ; pe de altă parte, dreapta LA' este perpendiculară pe coarde EF , căci unghiul $\angle H_aA'L = (\angle B - \angle C)/2$ ca și unghiul $\angle H_aAE$.

5. Raza cercului medial este egală cu jumătatea razei R a cercului circumscris.

Într-adevăr, figura $OAA'A''$ (Figura 2.29) este un paralelogram, deci raza $[OA]$ a cercului circumscris este egală cu diametrul $[A'A'']$ a cercului medial.

Figura 2.29



6. Să se arate că într-un triunghi, medianele sunt concurente.

Cu ajutorul teoremei lui Ceva avem conform proprietății medianelor $A_1B=A_1C$, $B_1A=B_1C$, și $C_1A=C_1B$. așadar egalitatea lui Ceva privind produsele segmentelor neadiacente se îndeplinește în mod natural.

7. Să se arate că înălțimile unui triunghi sunt concurente.

Cu ajutorul teoremei lui Ceva, dacă privim figura 2.30, putem scrie imediat:

$$A_1B = AB \cos B; AB_1 = AB \cos A$$

$$B_1C = BC \cos C; C_1B = BC \cos B$$

$$AC_1 = AC \cos A; A_1C = AC \cos C$$

Înmulțind aceste relații membru cu membru, obținem imediat relația lui Ceva.

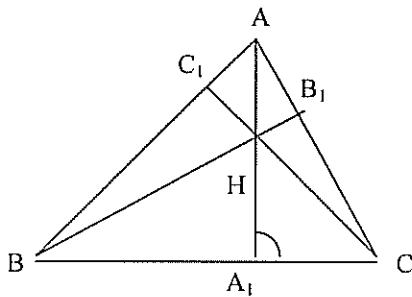


Figura 2.30

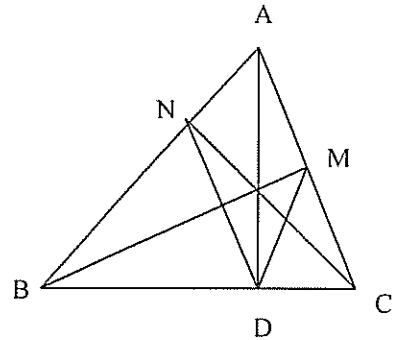


Figura 2.31

8. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și AD , $D \in BC$, o înălțime a sa. Din D se duc: o semidreaptă în interiorul unghiului ADB care intersectează latura AB în N și o semidreaptă în interiorul unghiului ADC care intersectează latura AC în M . Să se arate că, dacă cele două semidrepte sunt egal înclinate față de înălțimea AD , atunci dreptele BM , CN și AD sunt concurente.

Folosim reciproca teoremei lui Ceva. Cu notațiile din figura 2.31 avem:

$$\frac{|AN|}{|NB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CM|}{|MA|} = \frac{\sigma[ADN]}{\sigma[BDN]} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{\sigma[CDM]}{\sigma[ADM]} = \frac{\sigma[ADN]}{\sigma[ADM]} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{\sigma[CDM]}{\sigma[BDN]}$$

Dar triunghiurile DAN și ADM au unghiurile AND și ADM congruente și, prin urmare, $\frac{\sigma[ADN]}{\sigma[ADM]} = \frac{|AD| \cdot |DN|}{|AD| \cdot |DM|} = \frac{|DN|}{|DM|}$; analog $\frac{\sigma[CDM]}{\sigma[BDN]} = \frac{|DM| \cdot |DC|}{|DN| \cdot |BD|}$. Astfel, înlocuind în relația

precedentă, obținem: $\frac{|AN|}{|NB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CM|}{|MA|} = 1$.

9. În orice triunghi, trei ceviane de același rang sunt concurente.

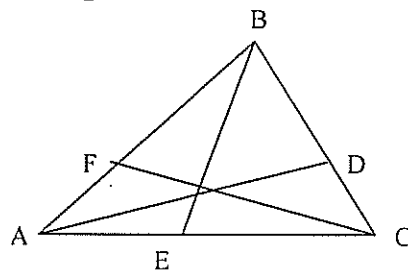
Folosind reciproca teoremei lui Ceva și definiția cevinei de rang k (numim AD ceviană de rangul k , dacă are loc relația:

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \left(\frac{c}{b}\right)^k \quad \text{unde } a, b, c, \text{ sunt laturile}$$

triunghiului, iar k este un număr real; analog pentru dreptele BE și CF , unde E și F sunt puncte pe laturile AC și AB , sunt ceviane de

rangul k adică: $\frac{|CE|}{|EA|} = \left(\frac{a}{c}\right)^k, \frac{|AF|}{|FB|} = \left(\frac{b}{a}\right)^k$

Figura 2.32



Înmulțind membru cu membru relațiile, obținem: $\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1$, ceea ce dovedește

concurența dreptelor respective.

10. Orice ceviană de rangul k este locul geometric al punctelor pentru care distanțele la două laturi ale triunghiului sunt proporționale cu acele laturi la puterea $(k-1)$.

În figura 2.33 am dus o ceviană k -fie ea AD , și am luat pe ea un punct oarecare M . Din M am dus distanțele y și z la laturile AC și AB și am notat cu φ și θ respectiv unghiurile BAD și DAC . Pe baza unor considerații de arii putem scrie următoarea relație: $\frac{\sigma(BAD)}{\sigma(DAC)} = \frac{|BD|}{|DC|}$. Pe de altă parte, mai

putem scrie: $\frac{\sigma(BAD)}{\sigma(DAC)} = \frac{|AD| \cdot c \cdot \sin \varphi}{|AD| \cdot b \cdot \sin \theta} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}$. Egalând relațiile obținem: $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}$. Dar

AD este ceviană de rangul k , deci: $\frac{|BD|}{|DC|} = \left(\frac{c}{b}\right)^k$, prin urmare: $\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \left(\frac{c}{b}\right)^{k-1}$

Din triunghiurile dreptunghice AM_1M și AM_2M avem imediat: $\sin \varphi = \frac{z}{AM}$, $\sin \theta = \frac{y}{AM}$, adică, de fapt: $\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \frac{z}{y}$. Egalând relațiile se obține: $\frac{z}{c^{k-1}} = \frac{y}{b^{k-1}}$. Dacă vom duce și distanța $MM_3=x$ la

latura BC , rezultă: $\frac{x}{a^{k-1}} = \frac{y}{b^{k-1}} = \frac{z}{c^{k-1}}$

Figura 2.33

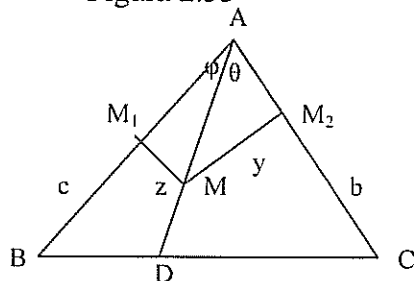
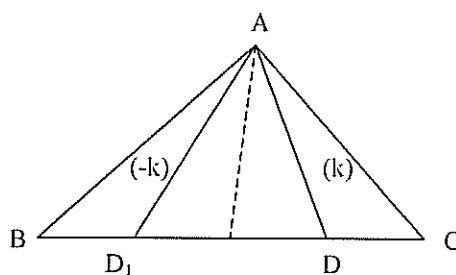


Figura 2.34



11. Ceviana izotomică a unei ceviane de rangul k este ceviana de rang $(-k)$.

Într-adevăr, dacă AD este ceviană de rang k , atunci: $\frac{BD}{DC} = \left(\frac{c}{b}\right)^k$. Izotomica AD_1 împarte

latura BC astfel încât are loc: $\frac{|BD_1|}{|D_1C|} = \frac{|DC|}{|BD|} = \left(\frac{b}{c}\right)^k = \left(\frac{c}{b}\right)^{-k}$.

CAPITOLUL III

PUNCTE REMARCABILE

3.1 Puncte izogonale. Proprietăți.

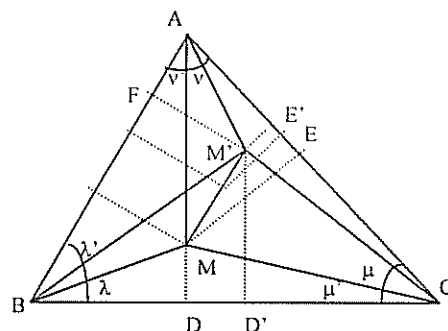
1. Dreptele izogonale a trei drepte concurente în M se întâlnesc într-un punct M' .

Într-adevăr, să însemnăm prin $\lambda, \lambda'; \mu, \mu'; \nu, \nu'$ unghiurile $\angle MBC, \angle MBA; \angle MCA, \angle MCB; \angle MAB, \angle MAC$ (Figura 2.19); izogonalele dreptelor AM, BM, CM vor face același unghi cu fiecare latură a triunghiului ABC . Dar după teorema lui Ceva avem:
$$\frac{\sin \lambda}{\sin \lambda'} \cdot \frac{\sin \mu}{\sin \mu'} \cdot \frac{\sin \nu}{\sin \nu'} = 1$$

Această relație exprimă de asemenea faptul că izogonalele AM', BM', CM' se întâlnesc în punctul M' . Punctele M și M' se numesc puncte izogonale; această definiție este evident reciprocă.

. Dacă $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$ sunt coordonatele normale ale punctelor izogonale M și M' , avem $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'$.

Figura 3.1



3.2 Punctul lui Lemoine

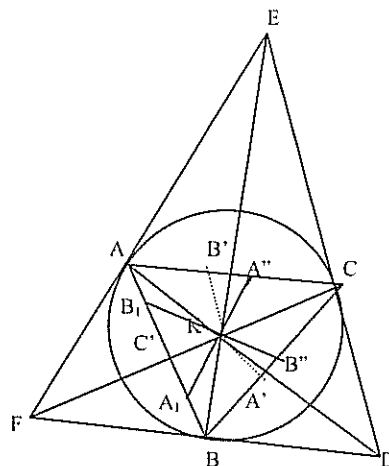
Punctul simedian. Izogonalul centrului de greutate G este un punct K pe care îl numim semedian (punctul lui Lemoine).

Acest punct, care se bucură de o mulțime de proprietăți, este unul din noile puncte remarcabile ale geometriei recente.

1. Distanțele punctului K (Figura 3.2) la laturile triunghiului ABC sunt proporționale cu lungimile laturilor triunghiului ABC .

Într-adevăr, dacă x, y, z sunt distanțele $K\alpha, K\beta, K\gamma$, avem: $x/a = y/b, y/b = z/c, z/c = x/a$ și în consecință: $x/a = y/b = z/c$.

Figura 3.2



2. Dreptele care unesc vârfurile triunghiului cu vârfurile triunghiului tangențial, format din tangentele la cercul circumscris, se întâlnesc în punctul simedian al triunghiului.

3. Punctul simedian este punctul a cărui sumă a pătratelor distanțelor la cele trei laturi ale triunghiului este minimă.

După identitatea lui Lagrange, avem:

$(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$, $(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = 4S^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$ dar pentru punctul simedian, avem: $ax - by = 0; bz - cy = 0; cx - az = 0$.

Prin urmare, pentru acest punct, suma $x^2+y^2+z^2$ este minimă și egală cu $4S^2/(a^2+b^2+c^2)$.

4. Antiparalelele duse prin punctul simedian (al lui Lemoine) sunt egale între ele.

Fie A_1A'' , B_1B'' (Figura 3.2) antiparalelele duse prin K la dreptele BC, AC. Avem $\angle BB_1K = \angle BCA = \angle AA_1K$. Triunghiul $A_1K_1B_1$ este isoscel și prin urmare $B_1K = A_1K$. Dar punctul K este la mijlocul fiecărei antiparalele și în consecință $A_1A'' = B_1B''$.

5. Puncte izogonale. Regiuni de corespondență între două puncte izogonale.

Dacă punctul M este în interiorul triunghiului, izogonalul său M' va fi la fel, căci două izogonale sunt sau în interiorul sau în exteriorul unui unghi al triunghiului.

Rezultă de asemenea că celelalte regiuni se repartizează după cum indică figura (Figura 3.3). Dacă de exemplu, M este în unghiul A în exteriorul triunghiului, izogonalul său va fi de asemenea în unghiul A, dar tot în exteriorul triunghiului, în virtutea primei observații.

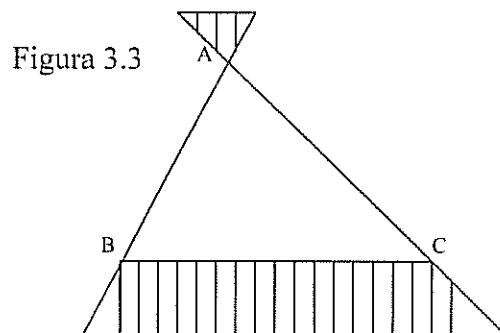


Figura 3.3

6. Între coordonatele unghiulare a două puncte izogonale, avem relațiile: $\lambda + \lambda' = \pi + A$, $\mu + \mu' = \pi + B$, $\nu + \nu' = \pi + C$.

Să considerăm cazul unui punct interior M: izogonalul său va fi de asemenea în interior; avem: $\lambda = \pi - (\gamma + \beta)$, $\lambda' = \pi - (\gamma' + \beta')$, de unde: $\lambda + \lambda' = 2\pi - (\gamma + \gamma') - (\beta + \beta')$. Dar $\gamma + \gamma' = C$, $\beta + \beta' = B$, de unde: $\lambda + \lambda' = \pi + A$.

Dacă una din coordonate este negativă, trebuie să luăm suplementul său pentru ca aceste formule să fie adevărate în toate cazurile.

7. Tripletele asociate la două puncte izogonale M și M' au punctele lor izogonale două câte două.

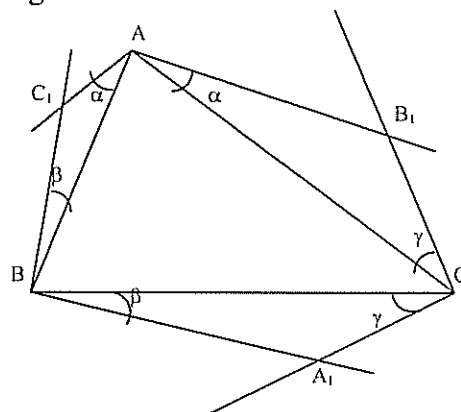
8. Centrele de omologie a acestor triplete și a triunghiului de referință sunt izogonale.

9. Prin fiecare vârf să ducem două izogonale oarecare. Aceste drepte determină prin intersecțiile lor mutuale vârfurile a patru triunghiuri omologice triunghiului de referință.

Pe fiecare izogonală găsim numai patru puncte de intersecție distincte de vârfuri, căci unul din punctele de intersecție se confundă cu vârful respectiv; acestea ne dau în total 12 puncte de intersecție. Pentru a obține unul din triunghiuri, pe izogonalele care trec prin A, două din punctele de intersecție, dintre care unul (C_1) aparține unei drepte ce trece prin B și celălalt (B_1) unei drepte ce trece prin C; fie, în sfârșit, A_1 punctul comun izogonalelor CB_1 și BC_1 . Triunghiul $A_1B_1C_1$ este omologic cu ABC.

Într-adevăr, fie α unghiul pe îl formează izogonalele AC_1 , AB_1 (Figura 3.4), respectiv cu laturile AB și AC; fie de asemenea β și γ unghiurile analoge relativ la vârfurile B și C. Coordonatele normale ale punctului comun dreptelor AA_1 , BB_1 , CC_1 sunt $\sin(A+\alpha)/\sin\alpha$, $\sin(B+\beta)/\sin\beta$, $\sin(C+\gamma)/\sin\gamma$. Pentru aceasta, este suficient de a observa că distanțele lui A_1 la dreptele AB și AC sunt egale cu: $BA_1 \cdot \sin(B+\beta)$, $CA_1 \cdot \sin(C+\gamma)$ și că $BA_1/CA_1 = \sin\gamma/\sin\beta$.

Figura 3.4



10. Dacă $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, cu alte cuvinte dacă triunghiurile ABC_1 , BCA_1 și CAB_1 sunt asemenea, centrul de omologie P al triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ are drept coordonate unghiulare $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$.

Cercurile ABC_1 , BCA_1 , CAB_1 se întâlnesc în centrul de omologie P .

Să luăm punctul P comun cercurilor ABC_1 și ACB_1 . Vom avea: $\angle APB = \pi - \gamma$, $\angle APC = \pi - \beta$; deci $\angle BPC = \pi - \alpha$, cu alte cuvinte, cercul BCA trece de asemenea prin P . Să ducem acum PC_1 și PC ; avem $\angle APC_1 = \angle ABC_1$ și $\angle CPA_1 = \angle CBA_1$. Prin urmare, din cauza izogonalității, $\angle APC_1 = \angle CPA_1$, ceea ce dovedește că C , C_1 și P sunt în linie dreaptă.

11. Pe laturile unui triunghi se construiesc, în exterior sau în interior, trei triunghiuri isoscele asemenea. Triunghiul format din vârfurile acestor triunghiuri este omologic cu triunghiul de referință.

Teorema lui Van Aubel

Fie ABC un triunghi și punctele $A' \in (BC)$, $B' \in [AC]$, $C' \in [AB]$. Dacă dreptele AA' , BB' , CC' sunt concurente într-un punct P , atunci există relația: $|B'A|/|B'C| + |C'A|/|C'B| = |PA|/|PA'|$

Demonstrația 1 (Figura 3.5).

Se aplică teorema lui Menelau pentru triunghiul $AA'C$ și punctele coliniare B, P, B' .

Rezultă:

$$|BA'|/|BC| \cdot (|B'C|/|B'A|) \cdot (|PA|/|PA'|) = 1.$$

De aici se obține:

$$(*) |B'A|/|B'C| = (|BA'|/|BC|) \cdot (|PA|/|PA'|)$$

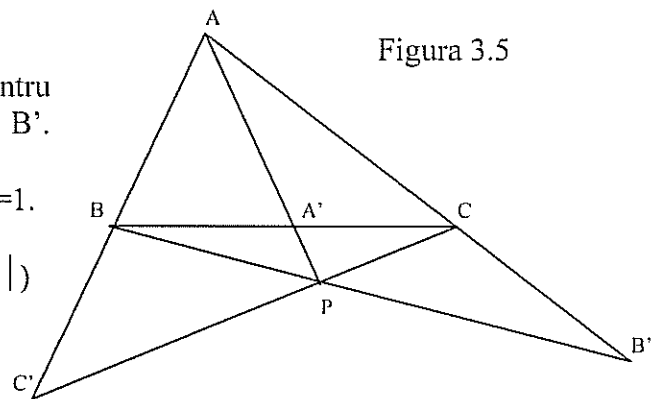


Figura 3.5

Se aplică apoi teorema lui Menelau pentru triunghiul $AA'B$ și punctele coliniare C, P, C' . Rezultă $(|CB|/|CA'|) \cdot (|PA'|/|PA|) \cdot (|C'A|/|C'B|) = 1$

De aici se obține:

$$(**) |C'A|/|C'B| = (|CA'|/|CB|) \cdot (|PA|/|PA'|)$$

Adunăm relațiile (*) și (**) și se obține: $|B'A|/|B'C| + |C'A|/|C'B| = |PA|/|PA'|$ adică tocmai relația Van Aubel.

Demonstrația 2.

$$\frac{B'A}{B'C} = \frac{\sigma[B'AB]}{\sigma[B'CB]} = \frac{\sigma[B'AB] - \sigma[B'AP]}{\sigma[B'CB] - \sigma[B'CP]} = \frac{\sigma[ABP]}{\sigma[BCP]}$$

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{\sigma[C'AC]}{\sigma[C'BC]} = \frac{\sigma[C'AP]}{\sigma[C'BP]} = \frac{\sigma[C'AC] - \sigma[C'AP]}{\sigma[C'BC] - \sigma[C'BP]} = \frac{\sigma[PAC]}{\sigma[BCP]}$$

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{\sigma[PAB]}{\sigma[PA'B]} = \frac{\sigma[PAC]}{\sigma[PA'C]} = \frac{\sigma[PAB] + \sigma[PAC]}{\sigma[PA'B] + \sigma[PA'C]} = \frac{\sigma[PAB] + \sigma[PAC]}{\sigma[BCP]} = \frac{B'A}{B'C} + \frac{C'A}{C'B}$$

3.3 Teorema lui Feuerbach

Cercul înscris triunghiului ascuțitunghic ABC este tangent cercului medial.

Ducem a doua tangentă interioară comună cercului înscris de centru I (Figura 3.6) și cercul exînscris de centru I_a și fie F punctul de contact cu cercul înscris. Această tangentă și latura BC sunt simetrice în raport cu bisectoarea interioară, care este dreapta Π_a . Ea este deci antiparalelă cu dreapta BC și trece prin M . Dar tangenta $A'T$ în A' la cercul medial este de asemenea antiparalelă cu dreapta BC . Rezultă că punctele A' și F sunt puncte omoloage în cercul medial și în cercul

respectiv înscris. Ducem atunci $A'F$ și fie E al doilea punct de întâlnire al acestei drepte cu cercul înscris. $[AH_a] \perp [BC]$

Avem $A'F \cdot A'E = A'D^2$. Pe de altă parte $A'D^2 = A'M \cdot A'H_a$. Avem deci $A'M \cdot A'H_a = A'F \cdot A'E$, ceea ce dovedește că patrulaterul MH_aEF este înscritibil. Rezultă că $\angle A'EH_a = \angle A'MF = \angle TA'C$

Punctul E aparține deci cercului medial.

De asemenea, tangentele în A' și E la cercul medial sunt egal înclinate pe coarda $A'E$; aceeași observație pentru tangentele în F și E la cercul înscris.

Deoarece tangentele $A'T$ și FM sunt paralele, rezultă că tangentele în E la cercul medial și la cercul înscris coincid. Cercurile deci sunt tangente în E ; punctul E se numește punctul lui Feuerbach.

Triunghiul $I_a I_b I_c$ și triunghiul DEF , format din punctele de contact ale cercului înscris, sunt omotetice. Ele au aceeași dreaptă a lui Euler OI . Demonstrație.

Coarda EF perpendiculară pe bisectoarea interioară AI este paralelă cu bisectoarea exterioară $I_b I_c$. Deci triunghiurile sunt omotetice. Dreapta lui Euler a lui $I_a I_b I_c$ este OI căci I este ortocentrul lui $I_a I_b I_c$ și O centrul cercului său medial. Pe de altă parte, omologul lui I , centrul cercului circumscris lui DEF este centrul O' al cercului circumscris lui $I_a I_b I_c$ care se găsește de asemenea pe OI și care dreapta lui Euler a lui $I_a I_b I_c$. Raportul de omotetie este $2R/r$, rezultă deci că dreapta OI' trece prin centrul de omotetie S și vom avea:

$$\frac{SI}{SO} = \frac{SI}{(SI + SO')/2} = \frac{r}{(r + 2R)/2} = \frac{2r}{r + 2R}.$$

Ortocentrul triunghiului DEF , ca un rezultat al omotetiei, se află pe SI . Deci OI este de asemenea dreapta lui Euler a triunghiului de contact DEF .

Fie A'', B'', C'' mijloacele arcelor BC, CA și AB . Triunghiurile $A''B''C''$ și DEF sunt omotetice și centrul de omotetie se află pe OI . Razele OA'' și ID sunt paralele și raportul de omotetie este R/r .

Axele radicale ale cercurilor de centru I_a, I_b și I_c , între ele, sunt bisectoarele interioare ale triunghiului complementar.

Demonstrație.

Într-adevăr, axa radicală a cercurilor de centre I_b și I_c trece prin A' , mijlocul tangentei comune $[D_b D_c]$ și este perpendiculară pe linia centrelor $I_b I_c$, deci paralelă la dreapta AI_a . Ea este deci bisectoarea interioară a unghiului \hat{A}' , în triunghiul medial $A'B'C'$ (Figura 3.7).

Centrul radical al cercurilor exînscrise este centrul cercului înscris triunghiului medial. Aceasta rezultă din teorema anterioară

Figura 3.6

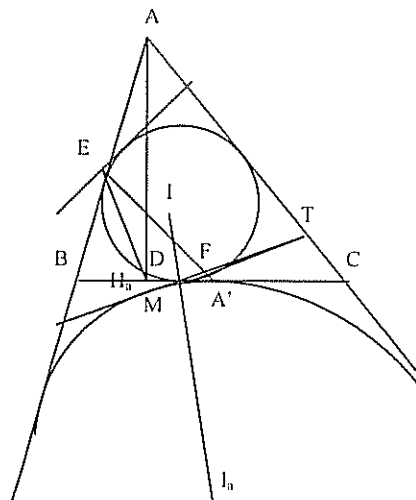
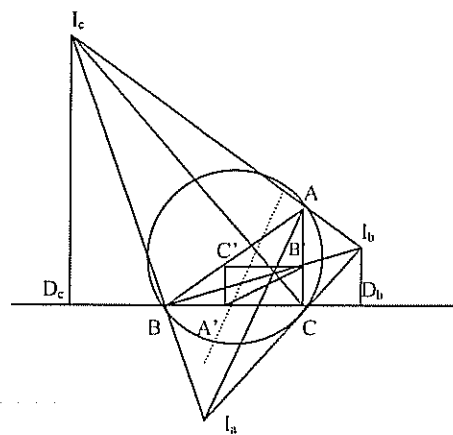


Figura 3.7



Centrele radicale ale cercurilor de centre I, I_a, I_b și I_c sunt centrele cercurilor înscrise și exînscrise în triunghiul medial.

Unghiul format de către bisectoarea interioară și înălțimea din A este egal cu $(\hat{B} - \hat{C})/2$. Acest unghi este egal cu $\hat{A}/2 - (90^\circ - \hat{B}) = \hat{A}/2 - (\hat{A}/2 + \hat{C}/2 - \hat{B}/2) = (\hat{B} - \hat{C})/2$

3.4 Punctul lui Kariya Teorema lui Kariya

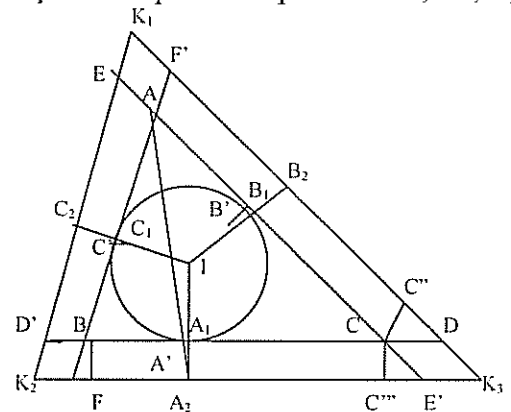
Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și fie A_1, B_1, C_1 punctele de contact al cercului înscris cu laturile triunghiului ($A_1 \in (BC), B_1 \in (CA), C_1 \in (AB)$). Se consideră punctele $A_2 \in (IA_1), B_2 \in (IB_1)$ și $C_2 \in (IC_1)$ astfel încât $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$. Atunci dreptele AA_2, BB_2 și CC_2 sunt concurente. (Punctul K de concurență a celor trei drepte se numește punctul lui Kariya).

Demonstrație.

Ducem prin A_2 paralelă la dreapta BC , prin B_2 paralelă la dreapta AC și prin C_2 paralelă la dreapta AB . Aceste paralele intersectează dreptele BC, CA și AB respectiv în punctele D, D', E, E' și F, F' . (Figura 3.8)

Fie $\{A'\} = BC \cap AA_2, \{B'\} = CA \cap BB_2, \{C'\} = AB \cap CC_2$. Atunci $A'B/A'C = A_2F/A_2E', B'C/B'A = B_2D/B_2F', C'A/C'B = C_2E/C_2D'$. Înmulțind ultimele trei egalități, se obține:
 $(A'B/A'C)(B'C/B'A)(C'A/C'B) = (A_2F/A_2E')(B_2D/B_2F')(C_2E/C_2D')$
 Trapezele dreptunghice $A_1A_2E'C$ și B_1B_2DC , sunt congruente.

Figura 3.8



Fie C''' proiecția lui C pe K_2K_3 și C'' proiecția lui C pe K_3K_1 . Triunghiurile $CC''D$ și $CC'''E'$ sunt congruente ($[CC'''] = [CC'']$, $\sphericalangle CC''D \equiv \sphericalangle CC'''E', \sphericalangle C'''CE' \equiv \sphericalangle C''CD$).

Rezultă $[C'''E'] = [C''D]; [DB_2] = [E'A_2]$.

Analog se obține $[EC_2] = [F'B_2]$ și $[FA_2] = [D'C_2]$.

Rezultă: $(A'B/A'C)(B'C/B'A)(C'A/C'B) = 1$, ceea ce implică concurența dreptelor AA', BB', CC' . Prin urmare dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente.

3.5 Punctul lui Vecten Teorema lui Vecten

Se consideră un triunghi ABC . Fie A_1 un punct din plan cu proprietățile:

- dreapta BC separă punctele A și A_1
- A_1 este centrul pătratului construit pe latura $[BC]$.

Analog se obțin punctele B_1 și C_1 . Atunci dreptele AA_1, BB_1 și CC_1 sunt concurente (Punctul de concurență a celor trei drepte se numește punctul lui Vecten.).

Demonstrație.

Este ușor de văzut că triunghiurile ACB_1 și ABC_1 sunt asemenea (Figura 3.9). Rezultă $AB/AC = AC_1/AB_1$ sau $AB \cdot AB_1 = AC \cdot AC_1$ și folosind congruența unghiurilor $\sphericalangle BAB_1$ și $\sphericalangle CAC_1$ rezultă: $AB \cdot AB_1 \sin m(\sphericalangle BAB_1) = AC \cdot AC_1 \sin m(\sphericalangle CAC_1)$

Ultima egalitate arată că: $\sigma[ABB_1] = \sigma[ACC_1]$. Analog se obține: $\sigma[BCC_1] = \sigma[BAA_1], \sigma[CAA_1] = \sigma[CBB_1]$

Se consideră punctele $A' \in (BC), B' \in (CA), C' \in (AB)$, astfel încât: $\{A'\} = BC \cap AA_1, \{B'\} = CA \cap BB_1, \{C'\} = AB \cap CC_1$

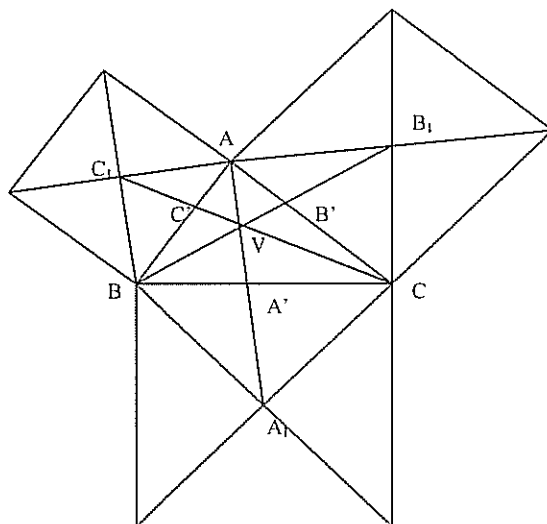
Este ușor de văzut că:
 $\sigma[A_1AB]/\sigma[A_1AC]=A'B/A'C$,
 $\sigma[B_1BC]/\sigma[B_1BA]=B'C/B'A$,
 $\sigma[C_1CA]/\sigma[C_1CB]=C'A/C'B$.

Folosind egalitățile de arii stabilite anterior, se obține:

$$(A'B/A'C)(B'C/B'A)(C'A/C'B)=1$$

Conform reciprocei teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente. Prin urmare dreptele AA_1 , BB_1 , CC_1 sunt concurente.

Figura 3.9



3.6 Teorema lui Steiner

Se consideră triunghiul ABC și punctele A' , $A'' \in (BC)$. Dacă $m(\angle A'AB) = m(\angle A''AC)$, atunci:

$$(A'B/A'C)(A''B/A''C) = AB^2/AC^2$$

Demonstrație (Figura 3.10)

Fie punctele B_1 (proiecția punctului B pe dreapta AA'), C_1 (proiecția punctului C pe dreapta AA'), B_2 (proiecția punctului B pe dreapta AA'') și C_2 (proiecția punctului C pe dreapta AA''). Triunghiurile dreptunghice $A'BB_1$ și $A'CC_1$ sunt asemenea.

$$\text{Rezultă: } A'B/A'C = BB_1/CC_1$$

Analog, din asemănarea triunghiurilor dreptunghice $A''BB_2$ și $A''CC_2$ se obține:
 $A''B/A''C = BB_2/CC_2$

Înmulțind ultimele două egalități, se obține:

$$(1) (A'B/A'C)(A''B/A''C) = (BB_1/CC_1)(BB_2/CC_2)$$

Triunghiurile dreptunghice ABB_2 și ACC_1 sunt asemenea (măsura unghiului $\angle BAB_2$ este egală cu măsura unghiului $\angle CAC_1$). Rezultă:

$$(1) BB_2/CC_1 = AB/AC$$

Triunghiurile dreptunghice BAB_1 și CAC_2 sunt asemenea (măsura unghiului $\angle BAB_1$ este egală cu măsura unghiului $\angle CAC_2$). Rezultă:

$$(2) BB_1/CC_2 = AB/AC$$

Din relațiile (1), (2) și (3) se obține relația lui Steiner:

$$(A'B/A'C)(A''B/A''C) = AB^2/AC^2$$

Observație. Dreptele AA' și AA'' satisfăcând condițiile din ipoteza teoremei lui Steiner se numesc ceviane izogonale (pe scurt izogonale).

Prin urmare: Dacă AA' și AA'' sunt izogonale, atunci este adevărată relația lui Steiner.

3.7 Teorema izogonalelor

Izogonalele a trei ceviane concurente sunt concurente.

Demonstrație1 (Figura 3.11)

Fie AA' , BB' , CC' trei ceviane concurente (A' aparține laturii $[BC]$, B' aparține laturii $[AC]$, C' aparține laturii $[AB]$), deci ele satisfac relația:

$$(1) (|A'B|/|A'C|)(|B'C|/|B'A|)(|C'A|/|C'B|) = 1$$

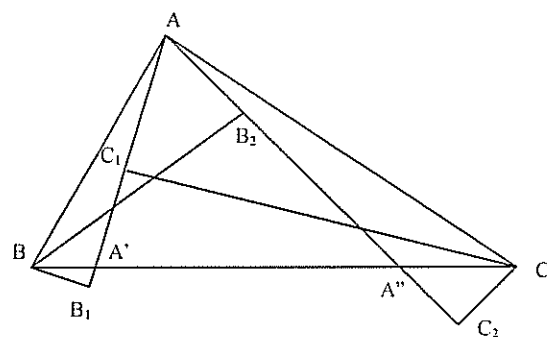


Figura 3.10

Fie AA'' , BB'' , CC'' (A aparținând laturii $[BC]$, etc.) izogonalele celor trei ceviane concurente date. Aplicând teorema lui Steiner rezultă:

$$(|A'B|/|A'C|)(|A''B|/|A''C|)=AB^2/AC^2$$

$$(2) \quad (|B'C|/|B'A|)(|B''C|/|B''A|)=BC^2/BA^2$$

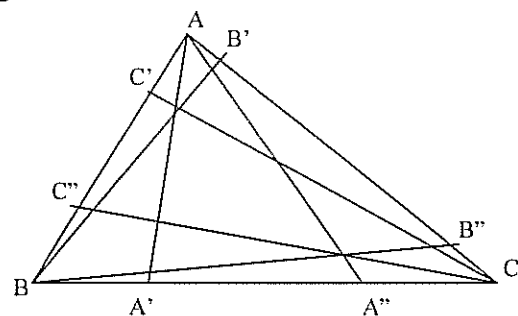
$$(3) \quad (|C'A|/|C'B|)(|C''A|/|C''B|)=CA^2/CB^2$$

Înmulțind relațiile (2), (3) și (4) și ținând seamă de relația 1 se obține :

$$(|A''B|/|A''C|)(|B''C|/|B''A|)(|C''A|/|C''B|)=1.$$

Folosind reciproca teoremei lui Ceva, se obține că dreptele AA'' , BB'' și CC'' sunt concurente.

Figura 3.11



Demonstrația 2.

Vom folosi forma trigonometrică a teoremei lui Ceva. Fie cevianele AM , BM , CM concurente în punctul M și fie (Figura 3.11) $\alpha=m(\angle MAB)$, $\beta=m(\angle MBC)$, $\gamma=m(\angle MCA)$.

Deoarece dreptele AM , BM , CM , sunt concurente, rezultă:

$$(x) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin(A-\alpha)} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(B-\beta)} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(C-\gamma)} = 1$$

Fie AA'' , BB'' și CC'' izogonalele cevienelor concurente. Atunci: $\alpha=m(\angle CAA'')$, $\beta=m(\angle CBB'')$, $\gamma=m(\angle ACC'')$. Deoarece cevianele AA'' , BB'' , CC'' verifică relația

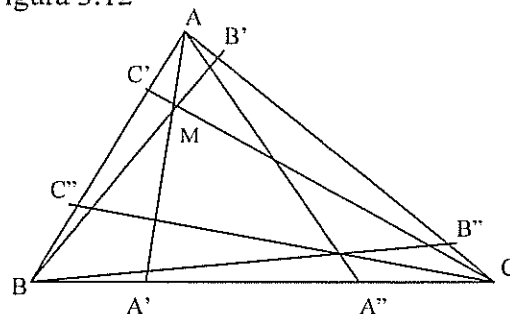
$$\frac{\sin \alpha}{\sin(A-\alpha)} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(B-\beta)} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(C-\gamma)} = 1 \text{ rezultă că ele sunt concurente.}$$

Observație. Deoarece medianele unui triunghi sunt concurente din teorema izogonalelor rezultă că și simedianele unui triunghi sunt concurente. Punctul de concurență a simedianelor se numește punctul lui Lemoine al triunghiului.

În legătură cu punctul lui Lemoine – punctul de concurență a simedianelor unui triunghi – există mărturii, care atestă că el a fost găsit în etape diferite de mai mulți cercetători, printre care S. Lhuillier (1809), E. Grebe (1847) și E. Catalan (1852), iar denumirea de “Punctul lui Lemoine” a fost dată de către J. Neuberg (1873) în cinstea lui E. Lemoine, cel care a contribuit mult la înflorirea geometriei triunghiului.

Acum se folosește cu precădere denumirea de “punct simedian” ceea ce apunează ambiguitatea survenită.

Figura 3.12



Lema lui Carnot

Fie un triunghi ABC și punctele A_1 , B_1 , C_1 , pe laturile triunghiului ($A_1 \in [BC]$, $B_1 \in [AC]$, $C_1 \in [AB]$). Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Perpendicularele în A_1 , B_1 , C_1 pe laturile $[BC]$, $[AC]$ respectiv $[AB]$ sunt concurente;

(ii) $A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0$.

Demonstrație: (i) \Rightarrow (ii). Fie M punctul de concurență a perpendicularelor în A_1 , B_1 , C_1 pe laturile $\triangle ABC$ (Figura 3.13). Se va demonstra că are loc relația: $A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0$

Într-adevăr, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice formate, rezultă:

$$AC_1^2 + MA_1^2 = AM^2 \quad BC_1^2 + MC_1^2 = BM^2$$

De unde $AC_1^2 - BC_1^2 = AM^2 - BM^2$ și analogele $BA_1^2 - CA_1^2 = BM^2 - CM^2$, $CB_1^2 - AB_1^2 = CM^2 - AM^2$ și prin însumare se obține: $AC_1^2 - BC_1^2 + BA_1^2 - CA_1^2 + CB_1^2 - AB_1^2 = 0$

(ii) \Rightarrow (i). Fie triunghiul ABC, $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$, $C_1 \in (AB)$, astfel încât există relația: $AC_1^2 - BC_1^2 + BA_1^2 - CA_1^2 + CB_1^2 - AB_1^2 = 0$ și se demonstrează că perpendiculara în A_1 pe dreapta BC, în B_1 pe dreapta AC și în C_1 pe dreapta AB sunt concurente. Fie M punctul de intersecție a perpendicularelor în B_1 pe dreapta AC și în C_1 pe dreapta AB și fie A_2 proiecția lui M pe dreapta BC.

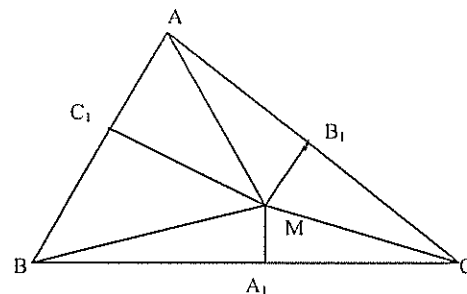


Figura 3.13

Atunci: $AC_1^2 - BC_1^2 + BA_2^2 - CA_2^2 + CB_1^2 - AB_1^2 = 0$

Deci $BA_2^2 - CA_2^2 = BA_1^2 - CA_1^2$. Se consideră un sistem de coordonate pe dreapta BC, astfel încât $B(O)$, $C(c)$, $A_1(x)$, $A_2(x_1)$. Relația anterioară se transformă în: $x_1^2 - (c - x_1)^2 = x^2 - (c - x)^2$ sau $2cx_1 = 2cx$ deci $x = x_1$, de unde $A_1 = A_2$.

3.8 Teoremele lui Naghel

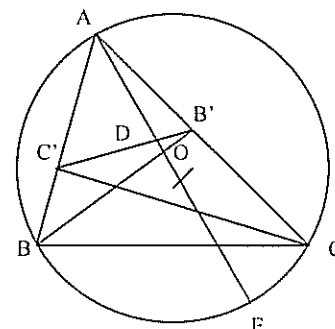
Prima teoremă a lui Naghel

Fie B' , C' proiecțiile vârfurilor B, C ale triunghiului ABC pe laturile opuse. Perpendiculara din A pe dreapta $B'C'$ trece prin centrul cercului circumscris triunghiului.

Demonstrație.

Fie $\mathcal{C}(O, R)$ cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 3.14). Perpendiculara din A pe dreapta $B'C'$ intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în E, iar pe $B'C'$ în dreapta D.

Figura 3.14



Patrulaterul ABEC este inscriptibil, deci unghiurile $\sphericalangle AB'C'$ și $\sphericalangle ABC$ sunt congruente.

Rezultă: $m(\sphericalangle DAB') = 90^\circ - m(\sphericalangle ABC)$. Prin urmare, din triunghiul EAC se deduce $m(\sphericalangle EAC) = 90^\circ - m(\sphericalangle ABC)$; $m(\sphericalangle AEC) = m(\sphericalangle ABC)$.

Rezultă: $m(\sphericalangle ACE) = 90^\circ$, deci $[AE]$ este diametru în cercul $\mathcal{C}(O, R)$.

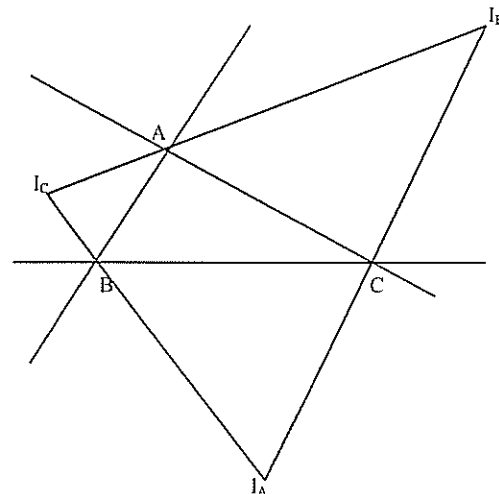
A doua teoremă a lui Naghel

Perpendicularele pe laturile unui triunghi duse prin centrele cercurilor exînscrise sunt concurente.

Demonstrația 1 (Figura 3.15)

Fie triunghiul ABC și fie I_A, I_B, I_C centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC. I_A se află pe bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle A$ și cele două bisectoare exterioare ale unghiurilor $\sphericalangle B$, respectiv $\sphericalangle C$. Din faptul că în orice triunghi bisectoarea interioară a unui unghi este perpendiculară pe bisectoarea exterioară a acelui unghi, rezultă că triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_AI_BI_C$ și aplicând prima teoremă a lui Naghel, cele trei perpendiculare din I_A, I_B, I_C respectiv pe dreptele BC, AC, AB, sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului $I_AI_BI_C$.

Figura 3.15



Demonstrația 2

Se aplică lema lui Carnot pentru demonstrarea teoremei a doua a lui Naghel (Figura 3.16).

Fie triunghiul ABC dat, I_A, I_B, I_C centrele cercurilor exînscrie triunghiului și fie A_1, B_1, C_1 picioarele din I_A, I_B, I_C respectiv pe laturile $[BC], [CA], [AB]$. Pentru a demonstra că aceste perpendiculare sunt concurente, este suficient să se arate că are loc relația: $BA_1^2 - CA_1^2 + CB_1^2 - AB_1^2 + AC_1^2 - BC_1^2 = 0$

Pentru aceasta este necesar să se calculeze $BA_1, A_1C, CB_1, AB_1, AC_1$ și BC_1 . Fie A', A'' cele două puncte de contact ale cercului exînscriș triunghiului ABC corespunzător laturii $[BC]$. Atunci $AA' = AA''$, deci $AB + BA' = AC + CA''$ sau $AB + BA_1 = AC + CA_1$

Dar $CA_1 = BC - BA_1$, de unde notând $AB = c, AC = b, BC = a, a + b + c = 2p$, rezultă:
 $BA_1 = p - c, CA_1 = p - b, CB_1 = p - a, AB_1 = p - c, AC_1 = p - b, BC_1 = p - a$

Înlocuind în: $BA_1^2 - CA_1^2 + CB_1^2 - AB_1^2 + AC_1^2 - BC_1^2 = S$

Rezultă: $S = 0$ și teorema este demonstrată.

Demonstrația 3 (Figura 3.17)

Fie I_A, I_B, I_C , centrele cercurilor exînscrie, E_1, F_1, G_1 , punctele de contact ale cercurilor de centre I_A, I_B, I_C cu laturile $[BC], [CA], [AB]$.

Se notează $I_A E_1 = R_1, I_B F_1 = R_2, I_C G_1 = R_3$

Triunghiul $I_A E_1 C$ este asemenea cu triunghiul $I_B F_1 C$, deci $CE_1 / CF_1 = R_1 / R_2$. Analog $AF_1 / AG_1 = R_2 / R_3, BG_1 / BE_1 = R_3 / R_1$ și prin înmulțire se obține:
 $(G_1 A / G_1 B) \cdot (E_1 B / E_1 C) \cdot (F_1 C / F_1 A) = 1$, deci dreptele AE_1, BF_1 și CG_1 sunt concurente.

Procedeul folosit în demonstrația 1 se poate generaliza.

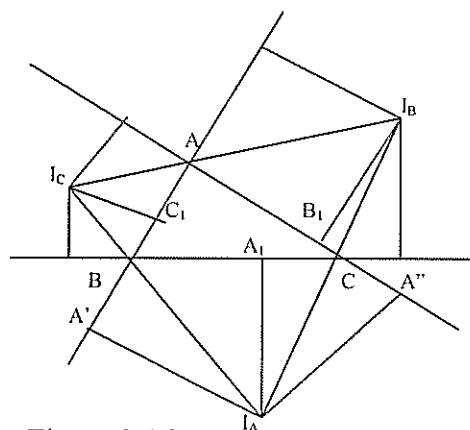
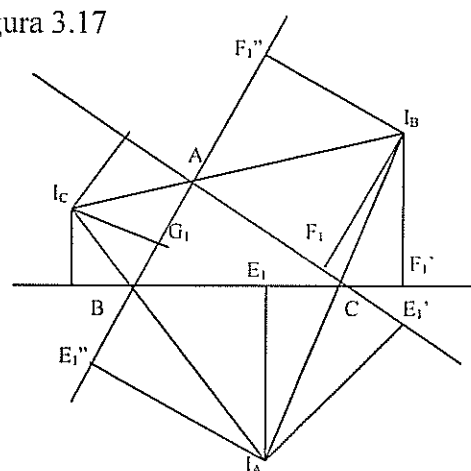


Figura 3.16

Figura 3.17



3.9 Punctul lui Nagel

Teorema lui Nagel

Dacă A', B', C' sunt punctele de contact ale cercurilor exînscrie cu laturile triunghiului ABC ($A' \in (BC), B' \in (CA), C' \in (AB)$), atunci dreptele AA', BB', CC' sunt concurente. (Punctul N de concurență al celor trei drepte se numește punctul lui Nagel).

Demonstrație (Figura 3.18):

Figura 3.18

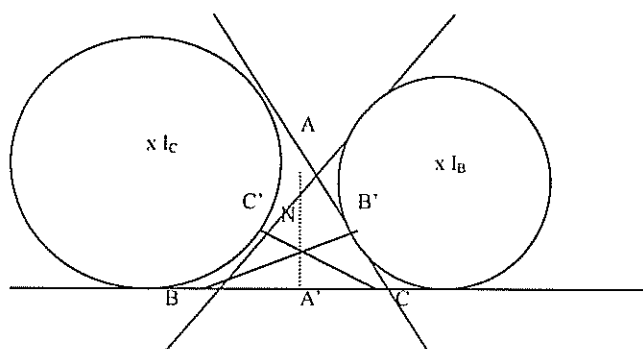
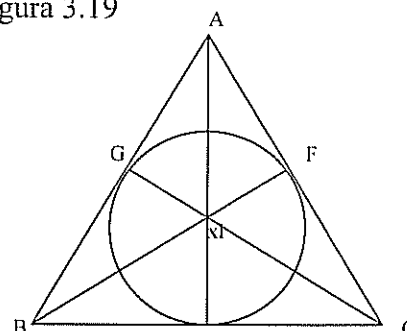


Figura 3.19



Fie a, b, c , lungimile laturilor triunghiului ($a=BC, b=AC, c=AB$) și fie p semiperimetrul triunghiului (Figura 3.19).

Notând $x=BA', y=A'C$, atunci $x+y=a$ și $x+c=y+b$.

Rezultă $2x+c=a+b$, adică $x=p-c$ și $y=p-b$.

În definitiv, se obține: $\frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{p-c}{p-b}$. Analog se obțin relațiile: $\frac{|B'C|}{|B'A|} = \frac{p-a}{p-c}$ și $\frac{|C'A|}{|C'B|} = \frac{p-b}{p-a}$.

Rezultă: $(|A'B|/|A'C|)(|B'C|/|B'A|)(|C'A|/|C'B|)=1$ și folosind reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente.

3.10 Punctul lui Gergonne

Teorema lui Gergonne

Într-un triunghi ABC dreptele care unesc vârfurile triunghiului cu punctele de contact ale cercului înscris cu laturile opuse sunt concurente. (Punctul de concurență a celor trei drepte se numește punctul lui Gergonne.)

Demonstrație (Figura 3.19)

Se folosesc notațiile din figura 3.19: E, F, G , sunt punctele de contact ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile triunghiului. Se folosește reciproca teoremei lui Ceva, deci se demonstrează că produsul $(|GA|/|GB|)(|EB|/|EC|)(|FC|/|FA|)=1$

Dar $|BE|=|BG|, |CE|=|CF|, |AF|=|AG|$ (tangente dintr-un punct exterior).

Deci dreptele sunt concurente.

Observație. Dacă în locul cercului înscris se consideră un cerc exînscriș teorema rămâne valabilă (Figura 3.20).

Într-adevăr, fie $D_1 \in (BC), E_1 \in (AC)$ și $F_1 \in (AB)$ punctele de contact ale cercului exînscriș

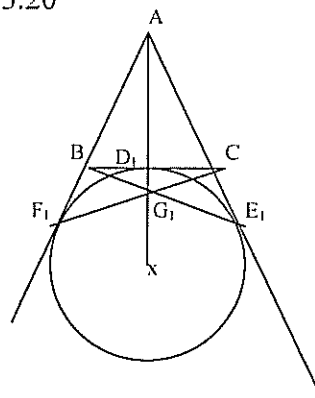
corespunzător vârfului A , cu $[BC]$, respectiv dreptele AC și AB . Se arată că dreptele AD_1, BE_1 și CF_1 sunt concurente. Pentru aceasta se va folosi reciproca teoremei lui Ceva. Se demonstrează că:

$$(|F_1A|/|F_1B|)(|D_1B|/|D_1C|)(|E_1C|/|E_1A|)=1$$

Dar $|F_1B|=|D_1B|, |D_1C|=|E_1C|, |F_1A|=|E_1A|$ (ca tangente duse dintr-un punct exterior la cerc).

Deci dreptele AD_1, BE_1 și CF_1 sunt concurente într-un punct G_1 . Analog se obțin punctele G_2 și G_3 . Punctele G_1, G_2, G_3 , se numesc adjunțele punctului Gergonne.

Figura 3.20



3.11 Teorema lui Neuberg

Dacă A_1, B_1, C_1 sunt picioarele a trei ceviane concurente și A_2, B_2, C_2 sunt simetricile punctelor A_1, B_1, C_2 față de mijloacele laturilor, atunci dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente.

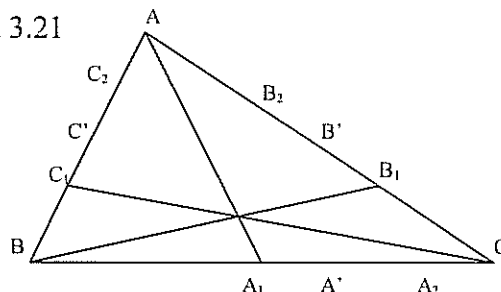
Demonstrație (Figura 3.21).

Deoarece: $|B_1A|=|B_2C|, |B_1C|=|B_2A|, |A_1B|=|A_2C|, |A_1C|=|A_2B|, |C_1A|=|C_2B|, |C_1B|=|C_2A|$, rezultă $|A_1B|/|A_1C|=|A_2C|/|A_2B|, |B_1C|/|B_1A|=|B_2A|/|B_2C|, |C_1A|/|C_1B|=|C_2B|/|C_2A|$

Se obține: $(|A_2C|/|A_2B|)(|C_2B|/|C_2A|)(|B_2A|/|B_2C|)=1$

și folosind reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA_2 , BB_2 și CC_2 sunt concurente

Figura 3.21



3.12 Triunghiul podar

Se numește triunghi podar al unui punct triunghiul care are ca vârfuri proiecțiile acestui punct pe laturile triunghiului de referință.

Fie M un punct situat în interiorul triunghiului ABC și $[MA_1] \perp [BC]$, $[MB_1] \perp [AC]$, $[MC_1] \perp [AB]$ (Figura 3.22). Triunghiul $A_1B_1C_1$ - triunghi podar - are următoarele proprietăți:

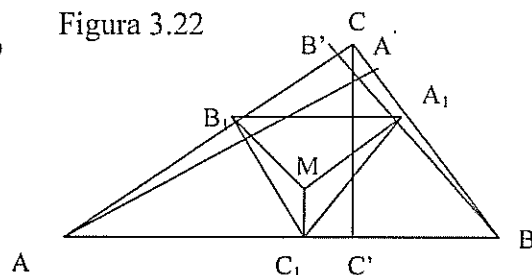
1. Dacă A_1 , B_1 , C_1 sunt unghiurile triunghiului podar și ρ raza cercului său circumscris, avem:

$$\frac{\rho a}{\sin A_1 / \sin A} = \frac{\rho b}{\sin B_1 / \sin B} = \frac{\rho c}{\sin C_1 / \sin C} = 2\rho$$

$$\text{deci } [B_1C_1] = 2 \cdot \rho \cdot \sin A_1 = \rho \cdot a \cdot \sin A$$

unde a , b , c sunt lungimile laturilor de referință.

Figura 3.22



2. Dacă triunghiul ABC este echilateral și d_a , d_b , d_c sunt distanțele punctului M la laturile triunghiului ABC , atunci $d_a + d_b + d_c = a\sqrt{3}/2$ unde a este latura triunghiului echilateral

$$3. A_1B^2 + B_1C^2 + C_1A^2 = A_1C^2 + B_1A^2 + C_1B^2$$

4. Din centrul de greutate G al unui triunghi ABC se duc perpendicularele GA_1 , GB_1 , GC_1 pe laturile triunghiului. Să exprimăm aria triunghiului $A_1B_1C_1$ în funcție de aria triunghiului ABC . Se cere deci aria triunghiului podar corespunzător centrului de greutate al triunghiului inițial. Știm că medianele triunghiului care se intersectează în centrul de greutate sunt ceviane de rangul 0 (zero). Putem generaliza problema calculând aria triunghiului podar corespunzător punctului de intersecție a trei ceviane de același rang (fie el k), urmând ca apoi prin particularizări ale lui k să obținem diferite expresii, specifice pentru punctele remarcabile.

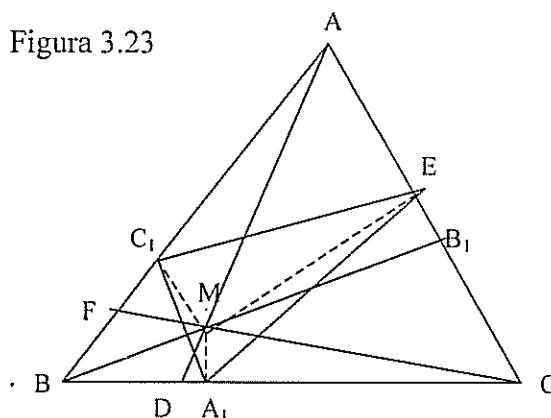
Fie deci M punctul de intersecție a trei ceviane de rang k și $A_1B_1C_1$ triunghiul podar corespunzător (Figura 3.23)

Întrucât în patrulaterul inscriptibil AC_1MB_1 avem $\angle A + \angle C_1MB_1 = 180^\circ$, deci

$$\sin A = \sin C_1MB_1, \quad \text{putem scrie}$$

$$\text{imediat: } \frac{\sigma(B_1MC_1)}{\sigma} = \frac{MC_1 \cdot MB_1}{bc}$$

Figura 3.23



$$\text{Dar } MA_1 = \frac{2\sigma a^{k-1}}{a^k + b^k + c^k}, \quad MB_1 = \frac{2\sigma b^{k-1}}{a^k + b^k + c^k}, \quad MC_1 = \frac{2\sigma c^{k-1}}{a^k + b^k + c^k}$$

Atunci înlocuind în relația anterioară obținem: $\sigma(A_1MC_1) = \frac{4\sigma^3 b^{k-2} c^{k-2}}{(a^k + b^k + c^k)^2}$ și evident, suprafețele analoage. Prin însumarea acestor relații se deduce:

$\sigma(A_1B_1C_1) = \frac{4\sigma^3(a^{k-2}b^{k-2} + b^{k-2}c^{k-2} + c^{k-2}a^{k-2})}{(a^k + b^k + c^k)^2}$ care este aria căutată a triunghiului podar asociat punctului M.

Particularizări:

i) cazul centrului de greutate ($k=0$):

$$\sigma(A_1B_1C_1) = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)}{9a^2b^2c^2} \cdot \sigma^3$$

ii) cazul centrului cercului înscris ($k=1$)

$$\sigma(A_1B_1C_1) = \frac{4\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)}{(a+b+c)^2} \cdot \sigma^3$$

iii) cazul punctului lui Lemoine ($k=2$):

$$\sigma(A_1B_1C_1) = \frac{12\sigma^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

iv) cazul centrului antibisector ($k=-1$):

$$\sigma(A_1B_1C_1) = \frac{4\left(\frac{1}{a^3b^3} + \frac{1}{b^3c^3} + \frac{1}{c^3a^3}\right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \cdot \sigma^3$$

3.13 Teoremele lui Grebe

Prima teoremă a lui Grebe

Distanțele punctelor simedianei vârfului A, la laturile unghiului sunt proporționale cu lungimile acestor laturi și reciproc.

Demonstrație (Figura 3.24).

Fie M un punct situat pe simediana vârfului A. Fie C'B' antiparalela dusă prin M la latura [BC], [MX]⊥[AC'], [MY]⊥[AB']. Este evident că aria triunghiului AC'M este egală cu aria triunghiului AB'M, deci AC'·MX=AB'·MY.

Rezultă MX/MY=AB'/AC', AB'/AC'=AB/AC, deci se obține MX/MY=AB/AC.

Reciproc, se consideră un punct M în interiorul triunghiului ACB, [MX]⊥[AB], [MY]⊥[AC], astfel încât MX/MY=AB/AC și antiparelele B'C' prin M la BC (B'∈(AC), C'∈(AB)). Se arată că MC'=MB', adică punctul M se află pe simediana vârfului A.

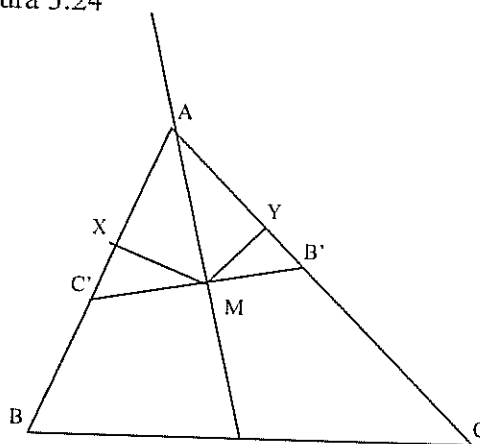
Cum triunghiul AB'C' este asemenea cu triunghiul ABC, rezultă AB/AC=AB'/AC' și folosind MX/MY=AB/AC, rezultă MX·AC'=MY·AB'. Deci, aria triunghiului AMC' este egală cu aria triunghiului AMB', ceea ce implică MC'=MB'.

Teoremă

A doua teoremă a lui Grebe

Punctul lui Lemoine este punctul pentru care suma pătratelor distanțelor la laturile triunghiului este minimă.

Figura 3.24



Demonstrație

Notăm cu a, b, c lungimile laturilor triunghiului și cu x, y, z distanțele unui punct M situat în interiorul triunghiului la laturile $[B,C]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$.

Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz se obține:

$$(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \text{ dar } ax+by+cz=2\sigma[ABC], \text{ deci } x^2+y^2+z^2 \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sigma^2[ABC]}, \text{ minimul}$$

$$\text{obținându-se când } x^2+y^2+z^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sigma^2[ABC]}.$$

Dar egalitatea se atinge când $x/a=y/b=z/c$, deci când M este punctul lui Lemoine.

Teorema lui Ptolemeu

Într-un patrulater convex $ABCD$ există relația $AC \cdot BD \leq AD \cdot BC + AB \cdot CD$

Demonstrație.

Se construiește triunghiul ADE asemenea cu triunghiul ABC ($\angle ABC \equiv \angle ADE$, $\angle BAC \equiv \angle DAE$) (Figura 3.25).

Atunci $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$. De aici rezultă:

$$DE = \frac{BC \cdot AD}{AB} \quad (x)$$

Deoarece $\angle EAC \equiv \angle DAB$ și $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ rezultă că triunghiurile EAC și

DAB sunt asemenea, deci: $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{ED}{EC}$.

De aici se obține $EC = \frac{AC \cdot BD}{AB} \quad (x')$

Cazul I. $E \notin CD$ (adică patrulaterul $ABCD$ nu este inscriptibil). Din triunghiul ECD rezultă: $EC < ED + DC$ și ținând seama de (x) și (x') se obține:

$$\frac{AC \cdot BD}{AB} < \frac{BC \cdot AD}{AB} + DC \text{ adică } AC \cdot BD < BC \cdot AD + DC \cdot AB$$

Cazul II $E \in CD$ (adică patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil).

Atunci $EC = ED + DC$ și folosind relațiile (x) și (x') se obține:

$$AC \cdot BD = BC \cdot AD + DC \cdot AB$$

Teoremă.

Fie $ABCD$ un patrulater convex. Următoarele afirmații sunt echivalente:

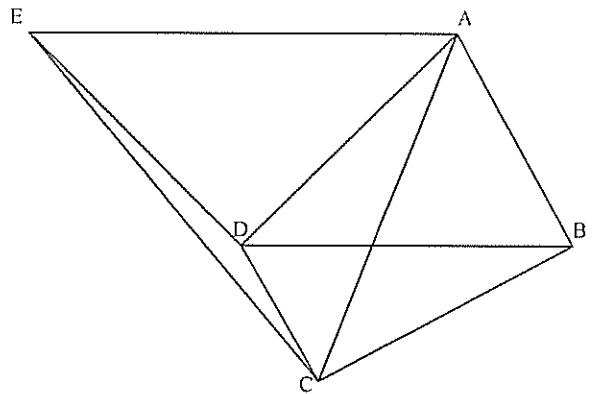
- i) patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil
- ii) există inegalitatea $AC \cdot BD = BC \cdot AD + AB \cdot CD$

Demonstrație. (i) \Rightarrow (ii) A se vedea teorema precedentă (cazul II).

(ii) \Rightarrow (i) Fie $ABCD$ un patrulater convex în care funcționează egalitatea (ii). Se demonstrează că $ABCD$ este inscriptibil. Să presupunem prin absurd că $ABCD$ nu este inscriptibil. Atunci conform teoremei anterioare (cazul I) rezultă că: $AC \cdot BD < AB \cdot CD + AD \cdot BC$ ceea ce contrazice egalitatea (ii) dată prin ipoteză.

Prin urmare patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.

Figura 3.25



3.14 Punctul lui Torricelli

Teorema lui Torricelli

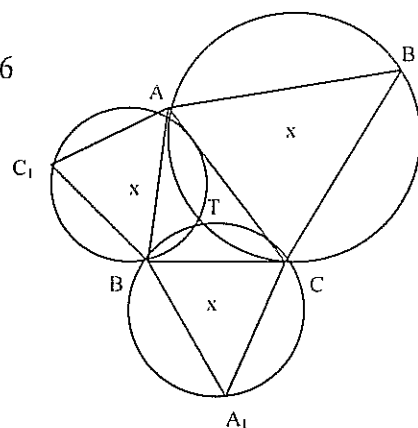
Teorema 1 (Torricelli)

Se consideră triunghiul ABC cu toate unghiurile strict mai mici decât 120° și pe laturile triunghiului se construiesc în exterior triunghiuri echilaterale ABC_1 , ACB_1 , BCA_1 . Cercurile circumscrise acestor triunghiuri au un punct comun.

Demonstrație (Figura 3.26)

Fie T punctul de intersecție a cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC_1 , ACB_1 . Se demonstrează că patrulaterul $BTCA_1$ este inscriptibil. Pentru aceasta se observă că patrulaterul C_1BTA și TCB_1A fiind inscriptibile, implică unghiurile $\angle BTA = \angle ATC = 120^\circ$, de unde rezultă patrulaterul $BTCA_1$ este inscriptibil.

Figura 3.26



Observație.

În felul acesta s-a demonstrat și că există un unic punct T din plan cu proprietatea că $\angle ATB$, $\angle ATC$, $\angle BTC = 120^\circ$, deoarece T trebuie să aparțină simultan celor trei cercuri considerate. Punctul T se numește punctul lui Torricelli pentru triunghiul ABC .

Teorema 2

Se consideră triunghiul ABC cu toate unghiurile strict mai mici decât 120° și triunghiurile echilaterale AB_1C , AC_1B , BC_1A construite în exterior ca în teorema precedentă. Atunci:

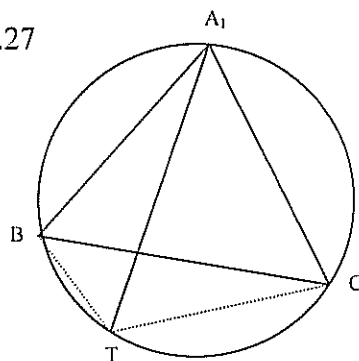
- AA_1 , BB_1 , CC_1 sunt concurente.
- $AT + BT + CT = AA_1 = BB_1 = CC_1$.
- Fie T punctul de concurență a cercurilor din problema precedentă. Se demonstrează că punctele A , T , A_1 sunt coliniare, de unde va rezulta că dreptele AA_1 , BB_1 , CC_1 sunt concurente în T .

Demonstrație.

Unind T cu A_1 (Figura 3.27) se obține: $\angle A_1TC = \angle CBA_1 = 60^\circ$ și $\angle ATC = 120^\circ$, deci unghiul $\angle ATA_1 = 180^\circ$.

Pentru punctul b) se procedează în felul următor: $AA_1 = AT + TA_1$. Din teorema lui Ptolomeu aplicată pentru patrulaterul inscriptibil $BTCA_1$ (în care triunghiul BCA_1 este echilateral) rezultă $BT + TC = TA_1$ (relația lui Schooten).

Figura 3.27



Istoria acestei proprietăți este și mai interesantă.

Francisc van Schooten Jr., care a trăit între 1637 și 1679, a fost unul dintre premergătorii teoriei probabilităților, a publicat în Olanda, la Leyda, o lucrare despre conice, în care a demonstrat și această relație: $TB + TC = TA_1$

Este foarte plauzibil ca Torricelli să nu fi avut posibilitatea să cunoască această carte a lui van Schooten. Pe de altă parte, Torricelli dăduse o demonstrație distinctă de cea lui van Schooten.

Francisc van Schooten a folosit pentru demonstrație teorema lui Ptolomeu (aproximativ 85-165 e.n) într-un patrulater inscriptibil, produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse.

Teorema lui Fermat

Punctul T considerat anterior are proprietatea că realizează minimul sumei $MA+MB+MC$, cu M punct din planul triunghiului ABC.

Demonstrația

Fie M în planul triunghiului ABC. Cel puțin unul din patrulaterelor MAB_1C , MBA_1C , MAC_1B este convex. Fie acesta MBA_1C . Aplicând inegalitatea lui Ptolomeu, rezultă: $MA_1 \leq MB+MC$ deci se obține că: $AA_1 \leq MA+MA_1 \leq MA+MB+MC$.

Folosind teorema 2 rezultă că: $TA+TB+TC \leq MA+MB+MC$ cu egalitate, dacă și numai dacă, $M=T$.

O generalizare a teoremei lui Torricelli.

Teoremă.

Fie ABC și $A_1B_1C_1$ două triunghiuri nedegenerate de laturi a, b, c, respectiv a_1, b_1, c_1 și arii S, respectiv S_1 , cu proprietatea că $m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle A_1)<180^\circ$, $m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle B_1)<180^\circ$, $m(\sphericalangle C)+m(\sphericalangle C_1)<180^\circ$. Construim în exteriorul triunghiului ABC triunghiurile BCA' , ACB' și ABC' , astfel încât $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A'BC \sim \Delta AB'C \sim \Delta ABC'$. Atunci:

- cercurile circumscrise triunghiurilor BCA' , ACB' și ABC' au un punct comun T, aflat în interiorul triunghiului ABC;
- dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente în T;
- punctul T este punctul pentru care suma $a_1 \cdot TA + b_1 \cdot TB + c_1 \cdot TC$ este minimă;
- are loc egalitatea:
 $a_1 AA' = b_1 BB' = c_1 CC' = \min(a_1 \cdot MA + b_1 \cdot MB + c_1 \cdot MC) = a_1 \cdot TA + b_1 \cdot TB + c_1 \cdot TC$.
- dacă se notează cu O_A, O_B, O_C centrele cercurilor circumscrise respectiv triunghiurilor BCA' , ACB' și ABC' atunci $\Delta O_A O_B O_C \sim \Delta ABC$.

Demonstrație

a) Se notează cercul circumscris triunghiului BCA' cu $\mathcal{C}(O_A)$ și analoagele. Fie atunci $\{T, A\} = \mathcal{C}(O_B) \cap \mathcal{C}(O_C)$. Evident: $m(\sphericalangle ATB) = 180^\circ - m(\sphericalangle AC'B) = 180^\circ - m(\sphericalangle C_1)$ și $m(\sphericalangle ATC) = 180^\circ - m(\sphericalangle B_1)$. Cum din ipoteză $m(\sphericalangle C) < 180^\circ - m(\sphericalangle C_1)$ și $m(\sphericalangle B) < 180^\circ - m(\sphericalangle B_1)$, rezultă că punctul T se află pe porțiunile cercurilor $\mathcal{C}(O_B)$, respectiv $\mathcal{C}(O_C)$, aflate în interiorul triunghiului ABC. Atunci: $m(\sphericalangle BTC) = 360^\circ - m(\sphericalangle ATB) - m(\sphericalangle ATC)$ deci $m(\sphericalangle BTC) = 360^\circ - (180^\circ - m(\sphericalangle C_1)) - (180^\circ - m(\sphericalangle B_1))$, adică $m(\sphericalangle BTC) = 180^\circ - m(\sphericalangle BA'C)$ de unde se obține că patrulaterul $BTCA'$ este inscriptibil. Am demonstrat că: " $\mathcal{C}(O_A) \cap \mathcal{C}(O_B) \cap \mathcal{C}(O_C) = \{T\}$ și T se află în interiorul triunghiului ABC".

b) Se demonstrează că punctele A, T și A' sunt coliniare. Cum $m(\sphericalangle ATC) = 180^\circ - m(\sphericalangle B_1)$ și $BTCA'$ este inscriptibil, rezultă că $m(\sphericalangle CTA') = m(\sphericalangle CBA')$.

Așadar: $m(\sphericalangle ATC) + m(\sphericalangle CTA') = 180^\circ$, deci A, T și A' sunt coliniare. Se obține: $AA' \cap BB' \cap CC' = \{T\}$.

c) Fie M un punct din plan. Conform inegalității lui Ptolomeu pentru punctele M, C, A', B rezultă că: $MB \cdot A'C + MC \cdot A'B \geq MA' \cdot BC$, ceea ce este echivalent cu $MB \cdot A'C/BC + MC \cdot A'B/BC \geq MA'$, cu egalitate când M aparține arcului BTC. Dar cum $\Delta A'BC \sim \Delta A_1B_1C_1$, rezultă că: $A'C/BC = A_1C_1/B_1C_1 = b_1/c_1$ și $A'B/BC = A_1B_1/B_1C_1 = c_1/a_1$, deci $MB \cdot b_1/a_1 + MC \cdot c_1/a_1 \geq b_1/c_1$ și $AB/BC = A_1B_1/B_1C_1 = c_1/a_1$, deci $MB \cdot b_1/a_1 + MC \cdot c_1/a_1 \geq MA'$. Se poate scrie $a_1 \cdot MA + b_1 \cdot MB + c_1 \cdot MC \geq a_1(MA + MA') \geq a_1 \cdot AA'$, egalitate având loc când M aparține arcului $BTC \cap AA'$, adică pentru $M=T$.

d) S-a demonstrat la punctul c) că $a_1 \cdot TA + b_1 \cdot TB + c_1 \cdot TC = a_1 \cdot AA'$. Analog se demonstrează că $a_1 TA + b_1 TB + c_1 TC = b_1 BB' = c_1 CC'$.

e) Fie $\{P\} = O_B O_C \cap AT$, $\{Q\} = O_A O_C \cap BT$, $\{R\} = O_A O_B \cap CT$. Patrulaterul $PO_B RT$ este inscriptibil (deoarece $O_B O_C \perp AT$ și $O_A O_B \perp CT$), deci: $m(\sphericalangle PO_B R) = 180^\circ - m(\sphericalangle PTC) = 180^\circ - (180^\circ - m(\sphericalangle B_1)) = m(\sphericalangle B_1)$.

Analog, din faptul că patrulateralele PO_CQT și QO_ART sunt inscriptibile, rezultă: $m(\sphericalangle PO_CQ) = m(\sphericalangle C_1)$ și $m(\sphericalangle QO_AR) = m(\sphericalangle A_1)$. Deci $\Delta O_A O_B O_C \sim \Delta A_1 B_1 C_1$. Demonstrația teoremei este încheiată. Punctul lui Torricelli se obține considerând $A_1 B_1 C_1$ echilateral.

3.15 Puncte importante din triunghi regăsite din proprietatea de minim

Fiind dat un punct T din interiorul triunghiului pentru care se cunosc măsurile unghiurilor $\sphericalangle ATB$, $\sphericalangle BTC$ și $\sphericalangle ATC$, se pot determina unghiurile și laturile triunghiului $A_1 B_1 C_1$. Dacă notăm cu α , β , γ măsurile unghiurilor $\sphericalangle BTC$, $\sphericalangle ATC$, $\sphericalangle ATB$, cu $m(\sphericalangle A_1)$, $m(\sphericalangle B_1)$. $M(\sphericalangle C_1)$ măsurile unghiurilor $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$, $\sphericalangle A_1 B_1 C_1$, $\sphericalangle A_1 C_1 B_1$, atunci $m(\sphericalangle A_1) = 180^\circ - \alpha$, $m(\sphericalangle B_1) = 180^\circ - \beta$, $m(\sphericalangle C_1) = 180^\circ - \gamma$. Evident că α , β , γ determină în mod unic punctul T . Rezultă: $a_1/\sin(\sphericalangle A_1) = b_1/\sin(\sphericalangle B_1) = c_1/\sin(\sphericalangle C_1) = 2R$. Punând $2R=1$, se obține: $a_1 = \sin\alpha$, $b_1 = \sin\beta$, $c_1 = \sin\gamma$.

i) Se consideră, de exemplu, T în centrul cercului înscris în triunghiul ABC .

Deci $\alpha = m(\sphericalangle BIC) = 180^\circ - 1/2m(\sphericalangle B) - 1/2m(\sphericalangle C) = 90^\circ + 1/2m(\sphericalangle A)$. Analog $\beta = 90^\circ + 1/2m(\sphericalangle B)$, $\gamma = 90^\circ + 1/2m(\sphericalangle C)$, de unde $a_1 = \cos(\sphericalangle A/2)$, $b_1 = \cos(\sphericalangle B/2)$, $c_1 = \cos(\sphericalangle C/2)$.

Rezultă că I , centrul cercului înscris, se obține ca fiind punctul pentru care se atinge minimul expresiei $MA \cdot \cos(\sphericalangle A/2) + MB \cdot \cos(\sphericalangle B/2) + MC \cdot \cos(\sphericalangle C/2)$, când punctul M se mișcă în planul triunghiului.

ii) Fie acum T ortocentrul H al triunghiului ascuțitunghic ABC . Rezultă: $\alpha = m(\sphericalangle AHB) = 180^\circ - m(\sphericalangle A)$, $\beta = 180^\circ - m(\sphericalangle B)$, $\gamma = 180^\circ - m(\sphericalangle C)$ deci $\sin\alpha = \sin(\sphericalangle A)$, $\sin\beta = \sin(\sphericalangle B)$, $\sin\gamma = \sin(\sphericalangle C)$. Așadar ortocentrul H este punctul din plan pentru care se atinge minimul expresiei $MA \cdot \sin(\sphericalangle A) + MB \cdot \sin(\sphericalangle B) + MC \cdot \sin(\sphericalangle C)$ când triunghiul ABC este ascuțitunghic și M se mișcă în plan.

Înmulțind expresia găsită cu constanta $2R$, se obține că:

$$\{H\} = \{M \in (ABC) \mid a \cdot MA + b \cdot MB + c \cdot MC \text{ minimă}\}$$

iii) Cazul $T=O$ (centrul cercului circumscris). Atunci: $\alpha = 2m(\sphericalangle A)$, $\beta = 2m(\sphericalangle B)$, $\gamma = 2m(\sphericalangle C)$.

Deci pentru triunghiul ascuțitunghic ABC ,

$$\{O\} = \{M \in (ABC) \mid MA \cdot \sin(2\sphericalangle A) + MB \cdot \sin(2\sphericalangle B) + MC \cdot \sin(2\sphericalangle C) \text{ minimă}\}$$

iv) Cazul $T=\omega_1$ (primul punct al lui Brocard). Atunci:

$$m(\sphericalangle A\omega_1 B) = 180^\circ - m(\sphericalangle B) = \gamma, \quad m(\sphericalangle B\omega_1 C) = 180^\circ - m(\sphericalangle C) = \alpha, \quad m(\sphericalangle C\omega_1 A) = 180^\circ - m(\sphericalangle A) = \beta$$

Deci pentru triunghiul ascuțitunghic ABC se obține:

$$\{\omega_1\} = \{M \in (ABC) \mid MA \cdot \sin(\sphericalangle C) + MB \cdot \sin(\sphericalangle A) + MC \cdot \sin(\sphericalangle B) \text{ minimă}\}$$

iv) Considerând $T=\omega_2$ (al doilea punct al lui Brocard) rezultă:

$$m(\sphericalangle A\omega_2 B) = 180^\circ - m(\sphericalangle A) = \gamma, \quad m(\sphericalangle B\omega_2 C) = 180^\circ - m(\sphericalangle B) = \alpha, \quad m(\sphericalangle C\omega_2 A) = 180^\circ - m(\sphericalangle C) = \beta$$

Prin urmare, fiind dat triunghiul ascuțitunghic ABC , se deduce că

$$\{\omega_2\} = \{M \in (ABC) \mid MA \cdot \sin(\sphericalangle B) + MB \cdot \sin(\sphericalangle C) + MC \cdot \sin(\sphericalangle A) \text{ minimă}\}$$

Evident că, particularizând triunghiul $A_1 B_1 C_1$ și considerând concluziile de la punctele a), b), c), d) ale teoremei, se pot obține și alte proprietăți interesante referitoare la punctele I , H , O , ω_1 , ω_2 precum și la alte puncte importante din triunghi.

Probleme minimului global (Paul Horja)

În continuare vor fi demonstrate două teoreme care elucidează în totalitate problema găsirii punctului T din plan pentru care suma $a_1 \cdot TA + b_1 \cdot TB + c_1 \cdot TC$ este minimă, unde a_1 , b_1 , c_1 sunt constante arbitrare pozitive. În generalizarea teoremei lui Torricelli problema este rezolvată în anumite condiții restrictive impuse numerelor a_1 , b_1 , c_1 cât și triunghiului $A_1 B_1 C_1$. De aceea se studiază situația în care cu numerele a_1 , b_1 , c_1 se poate construi un triunghi nedegenerat $A_1 B_1 C_1$ dar

pentru care nu mai sunt adevărate toate inegalitățile: $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle A_1) < 180^0$, $m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle B_1) < 180^0$, $m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle C_1) < 180^0$.

Din toate aceste trei inegalități, doar una poate fi falsă, deoarece dacă, de exemplu, $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle A_1) > 180^0$, $m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle B_1) > 180^0$ ar rezulta $180^0 - m(\sphericalangle C) + 180^0 - m(\sphericalangle C_1) \geq 180^0$, ceea ce este evident fals deoarece s-a presupus că triunghiul $A_1B_1C_1$ este nedegenerat. Așadar:

Teorema

Fie ABC și $A_1B_1C_1$ două triunghiuri nedegenerate de laturi a, b, c, a_1, a_2, a_3 și arii S respectiv S_1 cu proprietatea că $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle A_1) > 180^0$. Se construiesc în exteriorul triunghiului ABC triunghiurile BCA' , ACB' , ABC' , astfel încât $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A'BC \sim \Delta AB'C \sim \Delta ABC'$. Atunci

- a) cercurile circumscrise triunghiurilor BCA' , ACB' și ABC' au un punct comun T ;
- b) dreptele AA' , BB' , CC' sunt concurente în T ;
- d) are loc egalitatea $a_1 \cdot AA' = b_1 \cdot BB' = c_1 \cdot CC' = b_1 \cdot TB + c_1 \cdot TC - a_1 \cdot TA$;
- e) dacă notăm cu O_A, O_B, O_C centrele cercurilor circumscrise respectiv triunghiurilor BCA' , ACB' și ABC' atunci $\Delta O_A O_B O_C \sim \Delta A_1 B_1 C_1$ expresia $a_1 MA + b_1 MB + c_1 MC$ este minimă atunci când $M=A$.

Demonstrație.

a) Fie $\{T, A\} = \mathcal{C}(O_C) \cap \mathcal{C}(O_B)$. Se demonstrează că T nu aparține arcului AB , unde prin AB se înțelege arc aflat de aceeași parte a dreptei AB ca și punctul C . Se presupune că T aparține arcului AB . Dar cum $T \in \mathcal{C}(O_B)$, rezultă că T aparține arcului AC , unde prin arc AC se înțelege arc aflat de aceeași parte a dreptei AC ca și punctul B . Se știe că $O_B O_C$ separă punctele A și T (fiind dreapta ce unește centrele celor două cercuri). Fie $\{P\} = O_B O_C \cap AT$ și $\{S\} = AT \cap BC$.

În aceste condiții P separă A și T și cum T aparține arcului AB , rezultă că $T \in (AS)$, adică $P \in (AS)$.

Dar $m(\sphericalangle O_C AB) = 90^0 - m(\sphericalangle C') = 90^0 - m(\sphericalangle C_1)$, Figura 3.28

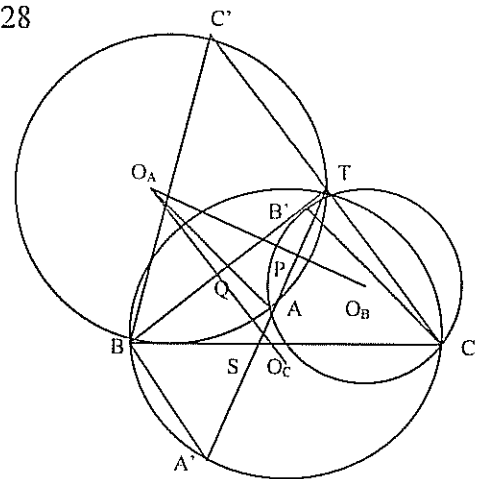
$m(\sphericalangle O_B AC) = 90^0 - m(\sphericalangle B') = 90^0 - m(\sphericalangle B_1)$, unde s-a folosit faptul că în orice triunghi înălțimea și raza cercului circumscris ce pornesc din același vârf sunt ceviane izogonale, deci:

$$m(\sphericalangle O_C AB) + m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle CAO_B) =$$

$$180^0 - (m(\sphericalangle B_1) + m(\sphericalangle C_1)) + m(\sphericalangle A) =$$

$m(\sphericalangle A_1) + m(\sphericalangle A) \geq 180^0$ ceea ce înseamnă că unind O_B cu O_C , punctul P de intersecție cu dreapta AT

nu poate fi situat pe semidreapta (AS) .



Presupunerea făcută este falsă, deci T nu aparține arcului AB , ceea ce implică imediat că $m(\sphericalangle BTA) = m(\sphericalangle BCA) = m(\sphericalangle C_1)$.

Analog și $m(\sphericalangle CTA) = m(\sphericalangle AB'C) = m(\sphericalangle B_1)$, de unde rezultă că $m(\sphericalangle BTC) = m(\sphericalangle BTA) + m(\sphericalangle CTA) = m(\sphericalangle B_1) + m(\sphericalangle C_1) = 180^0 - m(\sphericalangle A_1)$. Se poate conchide că $m(\sphericalangle BTC) + m(\sphericalangle BA'C) = 180^0$, deci patrulaterul $BTCA'$ este inscripibil, adică $T \in \mathcal{C}(O_A)$, echivalent cu $\mathcal{C}(O_A) \cap \mathcal{C}(O_B) \cap \mathcal{C}(O_C) = \{T\}$.

b) Se demonstrează că punctele C, T și C' sunt coliniare. Cum $m(\sphericalangle CTB) = 180^0 - m(\sphericalangle A_1)$ și $T \in \mathcal{C}(O_C)$, rezultă că $m(\sphericalangle C'TB) = m(\sphericalangle BAC') = m(\hat{A}_1)$ sau $m(\sphericalangle C'TB) = 180^0 - m(\sphericalangle BA'C) = 180^0 - m(\hat{A}_1)$. În ambele situații rezultă că C, T, C' sunt coliniare schimbându-și doar ordinea punctelor pe dreaptă.

Analog se demonstrează și că B, T, B' sunt coliniare. Dar cum T nu aparține arcului (AB), rezultă că $m(\angle BTA) = m(\angle BC'A) = m(\hat{C}_1)$. Cum patrulaterului BTCA' este inscriptibil, $m(\angle BTA') = m(\angle BCA') = m(\hat{C}_1)$. Se obține astfel că A, T, A' sunt coliniare. Deci $AA' \cap BB' \cap CC' = \{T\}$.

c) Se demonstrează că: $a_1 \cdot AA' = b_1 \cdot TB + c_1 \cdot TC - a_1 \cdot TA$. Conform celor demonstrate anterior rezultă că $A \in (TA')$, deci $AA' = TA' - TA$. Scriind relația lui Ptolomeu pentru patrulaterul inscriptibil TBA'C, se obține: $TB \cdot A'C + TC \cdot A'B = TA' \cdot BC$ sau $TB \cdot A'C/BC + TC \cdot A'B/BC = TA'$. Cum $\Delta A'BC \sim \Delta A_1B_1C_1$, rezultă că $A'C/BC = A_1C_1/B_1C_1 = b_1/a_1$ și $A'B/BC = A_1B_1/B_1C_1 = c_1/a_1$.

Deci se poate scrie că: $TB \cdot b_1/a_1 + TC \cdot c_1/a_1 = TA'$, adică $b_1 \cdot TB + c_1 \cdot TC = a_1 \cdot TA'$ sau $a_1 \cdot AA' = b_1 \cdot TB + c_1 \cdot TC - a_1 \cdot TA$.

Se va demonstra că $b_1 \cdot BB' = c_1 \cdot CC' = b_1 \cdot TB + c_1 \cdot TC - a_1 \cdot TA$. Cazul $B' \in (TB)$, deci $BB' = TB - TB'$.

În patrulaterul inscriptibil B'TCA: $TC \cdot AB' + TB \cdot AC = TA \cdot B'C$ sau $TC \cdot AB'/AC + TB = TA \cdot B'C/AC$. Dar cum $\Delta AB'C \sim \Delta A_1B_1C_1$, rezultă că: $AB'/AC = c_1/b_1$ și $B'C/AC = a_1/b_1$, deci $b_1 \cdot TB = a_1 \cdot TA - c_1 \cdot TC$. Rezultă că: $b_1 \cdot BB' = b_1 \cdot TB + c_1 \cdot TC - a_1 \cdot TA$.

Cazul $T \in (BB')$ s-ar trata analog cu demonstrarea faptului că $c_1 \cdot CC' = b_1 \cdot TB + c_1 \cdot TC - a_1 \cdot TA$ dacă $T \in (CC')$, caz care va fi analizat.

În patrulaterul inscriptibil TAB'C:

$TA \cdot BC' + TC' \cdot AB = AC' \cdot TB$ sau $TA \cdot BC'/AB + TC' = TB \cdot AC'/AB$.

Cum triunghiul $\Delta ABC' \sim \Delta A_1B_1C_1$, se obține $BC'/AB = a_1/c_1$ și $AC'/AB = b_1/c_1$, deci $c_1 \cdot TC' = b_1 \cdot TB - a_1 \cdot TA$ sau $c_1 \cdot CC' = b_1 \cdot TB + c_1 \cdot TC - a_1 \cdot TA$.

d) Fie $\{Q\} = O_A O_C \cap TB$ și $\{R\} = O_A O_B \cap TC$. Cum $O_A O_B \perp TA$, $O_B O_C \perp TB$, $O_A O_C \perp TC$ și $m\angle (O_C Q T) = m\angle (O_C P T) = 90^\circ$, rezultă $m\angle (Q O_C P) = m\angle (Q T P)$, patrulaterul $O_C Q P T$ fiind inscriptibil.

Dar și patrulaterul B'TCA este inscriptibil, de unde rezultă că:

$\angle QTP = \angle B'TA = \angle B'CA' = \angle A_1 C_1 B_1$ deci $\angle O_A O_B O_C = \angle C_1$.

Analog din faptul că patrulaterul $TPRO_B$ și $TB'AC$ sunt inscriptibile, rezultă că: $\angle O_A O_B O_C = \angle B_1$, deci $\Delta O_A O_B O_C \sim \Delta A_1 B_1 C_1$. Astfel se consideră triunghiul ABC și se construiesc prin B și C două drepte perpendiculare pe dreapta AB, respectiv dreapta AC, care se intersectează în D. Se aleg $D_1 \in (DB)$ și $D_2 \in (DC)$ (Figura 3.29), astfel încât $DD_1 = b_1$ și $DD_2 = c_1$. Se construiește prin A o paralelă la dreapta $D_1 D_2$ care intersectează dreapta DB în E și dreapta DC în F. Problema care se pune este de a demonstra că pentru orice punct M din plan, are loc relația: $a_1 \cdot MA + b_1 \cdot MB + c_1 \cdot MC \geq b_1 \cdot AB + c_1 \cdot AC$ cu egalitate când $M = A$. Se observă că dacă se presupune că $DE = k \cdot b_1$ și $DF = k \cdot c_1$, cu $k \in \mathbb{R}_+^*$, atunci: $b_1 \cdot AB + c_1 \cdot AC = 2\sigma[DEF]/k$. Așadar problema se reduce la a demonstra că: $k \cdot a_1 \cdot MA + k \cdot b_1 \cdot MB + k \cdot c_1 \cdot MC \geq 2\sigma[DEF]$.

Ținând cont de faptul că

$m(\hat{A}) + m(\hat{A}_1) \geq 180^\circ$ rezultă

$m(\hat{A}_1) \geq 180^\circ - m(\hat{A}) = m(\angle BDC)$, deci $\cos A_1 \leq \cos D$, unde prin D înțelegem măsura unghiului BDC. Atunci:

$k^2 \cdot a_1^2 = k^2 \cdot b_1^2 + k^2 \cdot c_1^2 - 2kb_1 \cdot kc_1 \cdot \cos$

$A_1 \geq k^2 \cdot b_1^2 + k^2 \cdot c_1^2 - 2kb_1 \cdot kc_1 \cdot \cos D = EF^2$, deci $k \cdot a_1 \geq EF$.

Teorema este demonstrată dacă se dovedește că $EF \cdot MA + DE \cdot MB + DF \cdot MC \geq 2\sigma[DEF]$,

ceea ce este echivalent cu

$EF \cdot MA/2 + DE \cdot MB/2 + DF \cdot MC/2 \geq \sigma[DEF]$.

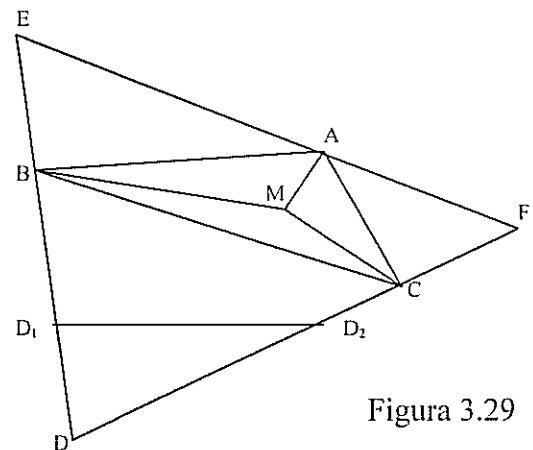


Figura 3.29

Evident $MA \geq d(M, EF)$, $MB \geq d(M, DE)$, $MC \geq d(M, DF)$, deci se poate scrie că
 $EF \cdot MA/2 + DE \cdot MB/2 + DF \cdot MC/2 \geq EF \cdot d(M, EF)/2 + DE \cdot d(M, DE)/2 + DF \cdot d(M, DF)/2 =$
 $= \sigma[MEF] + \sigma[MDE] + \sigma[MDF]$

Dar pentru orice M din plan, $\sigma[MEF] + \sigma[MDE] + \sigma[MDF] \geq \sigma[DEF]$. Rescriind tot șirul de inegalități, rezultă:

$ka_1 \cdot MA + kb_1 \cdot MB + kc_1 \cdot MC \geq EF \cdot MA + DE \cdot MB + DF \cdot MC \geq 2\sigma[DEF] = kb_1 \cdot AB + kc_1 \cdot AC$,
 adică: $a_1 \cdot MA + b_1 \cdot MB + c_1 \cdot MC \geq b_1 \cdot AB + c_1 \cdot AC$ cu egalitatea dacă și numai dacă $M=A$.

Evident că în cazul în care triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral și $m(\hat{A}) \geq 120^\circ$, se regăsește proprietatea cunoscută: $\min_M (MA+MB+MC) = AB+AC$

Demonstrația teoremei este încheiată.

Deci, în teorema anterioară s-a renunțat la condițiile restrictive impuse unghiurilor triunghiului $A_1B_1C_1$. Se enunță în continuare o teoremă prin care se elimină și condiția restrictivă impusă numerelor strict pozitive a_1, b_1, c_1 de se putea forma un triunghi cu ele. Se presupune că $a_1 \geq b_1 + c_1$. Evident, nu mai poate avea loc, de exemplu, și $b_1 > a_1 + c_1$ pentru că prin adunare s-ar obține $0 \geq 2c_1$, ceea ce este fals.

Teorema 2.

Fie triunghiul ABC de laturi a, b, c și numerele strict pozitive a_1, b_1, c_1 cu proprietatea că $a_1 \geq b_1 + c_1$. Atunci minimul expresiei $a_1 \cdot MA + b_1 \cdot MB + c_1 \cdot MC$ se obține atunci când punctul M coincide cu vârful A al triunghiului ABC .

Demonstrație

Se construiesc prin B și C două drepte perpendiculare pe AB , respectiv AC , care se intersectează în D . Se aleg $D_1 \in (DB)$ și $D_2 \in (DC)$, astfel încât $DD_1 = b_1$ și $DD_2 = c_1$. Se construiește prin A o paralelă la dreapta D_1D_2 care intersectează dreapta DB în E și dreapta DC în F (Figura 3.30)

. Problema revine deci la a demonstra că oricare ar fi M un punct din plan, are loc:
 $a_1 \cdot MA + b_1 \cdot MB + c_1 \cdot MC \geq b_1 \cdot AB + c_1 \cdot AC$, cu
 egalitatea când $M=A$. Se presupune că
 $DE = k \cdot DD_1 = k \cdot b_1$ și $DF = k \cdot DD_2 = k \cdot c_1$, $k \in \mathbb{R}_+^*$;
 atunci: $b_1 \cdot AB + c_1 \cdot AC = 2\sigma[DEF]/k$. Din ipoteză
 avem: $a_1 \geq b_1 + c_1$, deci:
 $ka_1 \geq k(b_1 + c_1) = DE + DF > EF$ Inegalitatea de
 demonstrat este echivalentă cu
 $ka_1 \cdot MA + kb_1 \cdot MB + kc_1 \cdot MC \geq 2\sigma[DEF]$.

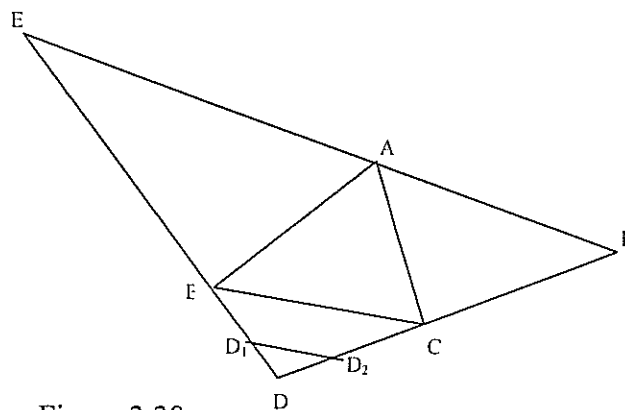


Figura 3.30

Ținând cont că $ka_1 > EF$, rezultă că dacă se demonstrează că
 $EF \cdot MA + DE \cdot MB + DF \cdot MC \geq 2\sigma[DEF]$, problema este terminată. Se observă însă că această inegalitate este chiar inegalitatea demonstrată în cursul demonstrației teoremei anterioare. Deci s-a arătat că:
 $a_1 \cdot MA + b_1 \cdot MB + c_1 \cdot MC \geq 2\sigma[DEF]/k = b_1 \cdot AB + c_1 \cdot AC$ cu egalitate când $M=A$. Demonstrația este încheiată.

Prin urmare problema găsirii poziției punctului din plan pentru care expresia $a_1 \cdot MA + b_1 \cdot MB + c_1 \cdot MC$ ia valoarea minimă a fost elucidată oricare ar fi constantele strict pozitive a_1, b_1, c_1 . Dacă una din aceste constante este nulă, problema revine la una mult mai simplă.

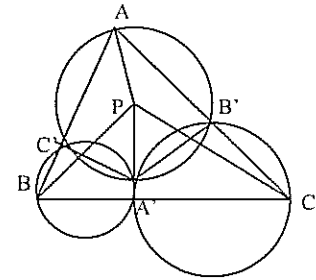
3.16 Punctele lui Brocard

Triunghiuri înscrise într-un triunghi dat

Un triunghi ale cărui vârfuri A', B', C' se găsesc pe segmentele interioare ale laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale unui triunghi se numește triunghi înscris. Dacă unul, cel puțin, din vârfuri se găsește pe prelungirea laturilor, se spune că triunghiul este exînscris.

1. Proprietăți. Cercurile $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ se taie în același punct P (Figura 3.31).

Figura 3.31



Fie P punctul de întâlnire al cerurilor $AB'C'$, $BC'A'$. Pentru că unghiurile $\sphericalangle C'PB'$ și $\sphericalangle C'PA'$ sunt respectiv egale cu $(\pi - \sphericalangle A)$ și $(\pi - \sphericalangle B)$, rezultă

că unghiul $\sphericalangle A'PB'$ este egal cu $2\pi - (\pi - \sphericalangle A) - (\pi - \sphericalangle B) = \pi - \sphericalangle C$, ceea ce arată că patrulaterul $A'PB'C$ este înscritibil.

2. Coordonatele unghiulare ale punctului P sunt: $\sphericalangle (A+A')$, $\sphericalangle (B+B')$, $\sphericalangle (C+C')$. Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} \sphericalangle APB &= \sphericalangle APC' + \sphericalangle C'PB = \sphericalangle AB'C' + \sphericalangle C'A'B = \pi - \sphericalangle A - \sphericalangle AC'B' + \pi - \sphericalangle B - \sphericalangle BC'A' = \\ &= \pi - \sphericalangle A - \sphericalangle B + \sphericalangle C', \quad \sphericalangle APB = C + C' \end{aligned}$$

3. Punct pivot. Punctul P rămâne același când triunghiul $A'B'C'$ variază rămânând asemenea cu el însuși, căci coordonatele sale unghiulare nu depind decât de unghiurile triunghiurilor ABC , $A'B'C'$. Acest punct se numește punctul pivot al familiei de triunghiuri asemenea, considerate.

4. Există șase familii distincte de triunghiuri înscrise asemenea cu un triunghi dat, după felul cum vârfurile sunt așezate pe laturile triunghiului de referință.

Avem următoarele posibilități:

pe AB :	A'	A'	B'	B'	C'	C'
pe BC :	B'	C'	C'	A'	A'	B'
pe CA :	C'	B'	A'	C'	B'	A' ,

căci pe fiecare latură se poate plasa un vârf și apoi se poate schimba poziția celorlalte două. Fiecare tip de triunghi înscris admite deci șase puncte pivot.

5. Triunghiul podar al punctului pivot este asemenea cu triunghiul $A'B'C'$. El aparține de asemenea familiei corespunzătoare de triunghiuri înscrise.

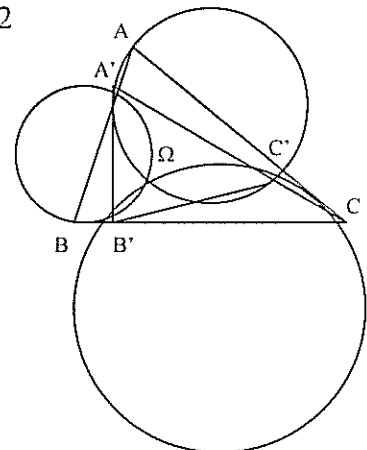
6. Locul centrelor cerurilor $A'B'C'$ este perpendiculara ridicată în mijlocul lui $[PP']$, P' fiind izogonalul punctului P .

Punctele lui Brocard.

Să considerăm triunghiurile înscrise $A'B'C'$ (Figura 3.32) asemenea triunghiului de referință ABC . Printre cele șase familii, este locul de a distinge pe acelea care se obțin din triunghiul ABC , prin continuitate, deplasându-ne pe perimetrul său în sens direct sau invers.

1. Punctele pivot corespunzătoare se numesc punctele lui Brocard; ele s-ar mai putea de asemenea numi pivoturi de asemănare.

Figura 3.32



Vom spune că primul punct Ω este punctul direct al lui Brocard și punctul Ω' (Figura 3.33) punctul retrograd al lui Brocard sau încă Ω primul punct și Ω' al doilea punct al lui Brocard.

Această definiție depinde evident de modul de notare al vârfurilor; cu convenția pe care am făcut-o, de a nota vârfurile prin A, B, C , urmărind pe perimetrul triunghiului sensul trigonometric direct, definiția este precisă și nu există ambiguitate.

2. Coordonatele și proprietățile fundamentale ale punctelor lui Brocard.

Coordonatele unghiulare ale punctelor lui Brocard sunt:

Pentru Ω , $\sphericalangle A\Omega B = \pi - \sphericalangle B$, $\sphericalangle B\Omega C = \pi - \sphericalangle C$, $\sphericalangle C\Omega A = \pi - \sphericalangle A$;

Pentru Ω' , $\sphericalangle A\Omega' B = \pi - \sphericalangle A$, $\sphericalangle B\Omega' C = \pi - \sphericalangle B$, $\sphericalangle C\Omega' A = \pi - \sphericalangle C$.

Pentru punctul direct Ω , vârful A' se găsește pe AB ; avem prin urmare $\sphericalangle A\Omega B = \sphericalangle C + \sphericalangle A = \pi - \sphericalangle B$; celelalte se deduc prin permutări circulare.

Pentru punctul Ω' , vârful B se găsește pe AB ; avem prin urmare

$$\sphericalangle A\Omega' B = \sphericalangle C + \sphericalangle B = \pi - \sphericalangle A$$

3. Cercurile $A\Omega B, B\Omega C, C\Omega A$ sunt respectiv tangente la dreptele BC, CA, AB .

Cercul $A\Omega B$ va fi tangent la dreapta BC , pentru că arcul $A\Omega B$ este capabil de unghiul $(\pi - \sphericalangle B)$; același raționament pentru celelalte. La fel cercurile $A\Omega' B, B\Omega' C, C\Omega' A$ sunt respectiv tangente la dreptele AC, BA, CB ; aceeași demonstrație. Un cerc ce trece prin două vârfuri ale unui triunghi și este tangent la una din laturile triunghiului se numește cerc adjunct. Fiecare triunghi are șase cercuri adjuncte. Cu această definiție se poate enunța și proprietatea precedentă:

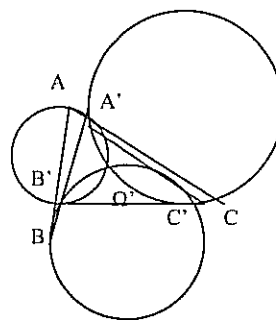


Figura 3.33

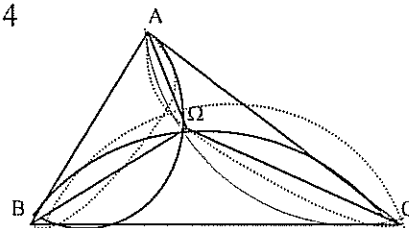
Trei cercuri adjuncte, luate în același sens, se întâlnesc într-unul din punctele lui Brocard.

4. Dreptele $A\Omega, B\Omega, C\Omega$ fac același unghi ω cu dreptele AB, BC, CA . Cu alte cuvinte, acestea sunt trei izocline concurente.

Această proprietate rezultă imediat cu ajutorul cercurilor adjuncte. Într-adevăr, unghiurile $\sphericalangle BA\Omega, \sphericalangle \Omega BC$ sunt egale pentru că au aceeași măsură, arcul $B\Omega$, în cercul adjunct $A\Omega B$. Proprietatea rezultă de asemenea din faptul că triunghiul ABC aparține familiei de triunghiuri înscrise relative la pivotul Ω ; unghiul său caracteristic,

cu alte cuvinte, unghiul de rotație cu care trebuie să se rotească dreptele $\Omega A, \Omega B, \Omega C$ este egal cu $(\frac{\pi}{2} - \omega)$ (figura 3.34).

Figura 3.34

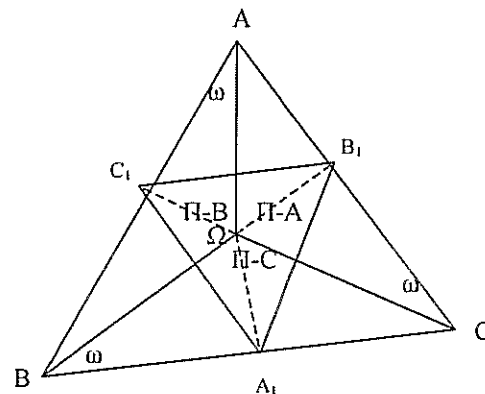


La fel, dreptele $A\Omega', B\Omega', C\Omega'$ au aceeași înclinare ω pe dreptele AC, BA, BC ; aceeași demonstrație.

5. Triunghiul podar corespunzător punctului Brocard(Ω) al triunghiului ABC are același unghi Brocard ca și triunghiul inițial.

Fie deci Ω punctul lui Brocard și ω unghiul lui Brocard. Construim triunghiul podar asociat lui și unim Ω cu vârfurile triunghiului. Scriem mai întâi relația de proporționalitate în cazul concret din figura 3.35:

Figura 3.35



$$\text{Avem deci: } \frac{B_1 C_1}{BC \cdot A\Omega} = \frac{A_1 C_1}{AC \cdot B\Omega} = \frac{A_1 B_1}{AB \cdot C\Omega} = \frac{1}{2R}$$

Expresiile segmentelor $A\Omega$, $B\Omega$, $C\Omega$ sunt egale cu: $A\Omega = \frac{b \sin \omega}{\sin A} = \frac{2Rb \sin \omega}{a}$,
 $B\Omega = \frac{c \sin \omega}{\sin B} = \frac{2Rc \sin \omega}{b}$, $C\Omega = \frac{a \sin \omega}{\sin C} = \frac{2Ra \sin \omega}{c}$,

Prin urmare: $\frac{B_1 C_1 \cdot a}{ab \cdot 2R \sin \omega} = \frac{A_1 C_1 \cdot b}{bc \cdot 2R \sin \omega} = \frac{A_1 B_1 \cdot c}{ca \cdot 2R \sin \omega} = \frac{1}{2R}$ de unde rezultă
 $\therefore \frac{B_1 C_1}{a} = \frac{A_1 C_1}{b} = \frac{A_1 B_1}{c} = \sin \omega$

Expresia sinusului unghiului Brocard este următoarea: $\sin \omega = \frac{2\sigma}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}$

3.17 Aplicații

1. În triunghiul ABC simetrica înălțimii din A față de bisectoarea interioară a acestui triunghi intersectează latura BC în A'. Analog se obțin punctele B' și C' pe celelalte laturi. Să se arate că distanțele AA', BB', CC' satisfac relația: $\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = \frac{2}{R}$.

Metoda 1.

Fie $AD = h_a$ (Figura 3.36). Avem:
 $\angle DAA' = \angle BAC - 2\angle BAD = \angle BAC - 2(90^\circ - \angle ABD) = \angle ABC - \angle BCA$. Așadar,

$$\cos(\angle DAA') = \cos(B - C) = \frac{h_a}{AA'} = \frac{2S}{a \cdot AA'}$$
 și
 deci

$$\frac{1}{AA'} = \frac{a}{2S} \cos(B - C) = \frac{R}{S} \sin A \cos(B - C) = \frac{R}{2S} [\sin(A + B - C) + \sin(A - B + C)] = \frac{R}{2S} (\sin 2C + \sin 2B)$$

Atunci $\sum \frac{1}{AA'} = \frac{R}{2S} \sum (\sin 2C + \sin 2B) = \frac{R}{S} \sum \sin 2A = \frac{4R}{S} \sin A \sin B \sin C$. Cum însă
 $S = \frac{ab \sin C}{2} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, obținem rezultatul cerut

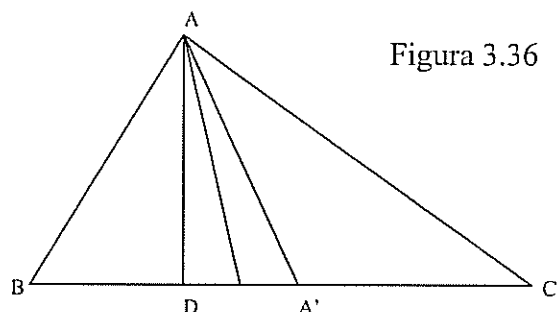


Figura 3.36

Metoda 2.

Izogonala AA' a înălțimii AD trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC (Figura 3.37) și presupunem că ea intersectează cercul a doua oară în A''.

Proiecția E a centrului O pe latura BC este mijlocul acesteia. Din triunghiul BOE

$$\text{avem } OE = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = R \cos A \text{ și, ținând}$$

seama că triunghiurile A'OE și A'AD sunt

$$\text{asemenea, avem: } \frac{A'O}{AA'} = \frac{OE}{AD} = \frac{R \cos A}{h_a} \text{ și}$$

$$\text{apoi } \frac{h_a}{AA'} = \frac{R \cos A}{A'O} = \frac{R \cos A}{AA' - R} = \frac{h_a - R \cos A}{R}$$

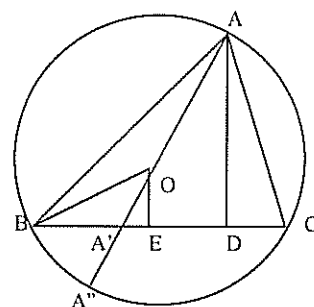


Figura 3.37

$$\text{Atunci } \sum \frac{1}{AA'} = \sum \frac{ha - R \cos A}{Rh_a} = \frac{3}{R} - \sum \frac{\cos A}{h_a} = \frac{3}{R} - \frac{1}{2S} \sum a \cos A = \frac{3}{R} - \frac{R}{2S} \sum \sin 2A$$

și precum în cazul primei variante de rezolvare avem:

$\sum \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C = \frac{abc}{2R^3} = \frac{2S}{R^2}$ rezultat care, introdus în egalitatea de mai sus, conduce la egalitatea din enunț.

2. Se consideră cercul de centru O și raza R și punctul A fix pe acest cerc. Se consideră, de asemenea, punctul B , simetricul punctului O față de punctul A , precum și punctul M , variabil pe cerc. Fie C simetricul punctului A față de M și P punctul în care dreapta BM intersectează OC . Se cere locul geometric al punctului P , când M descrie cercul dat.

Rezolvare (Figura 3.38)

Pentru triunghiul AOC tăiat de transversala BP aplicăm teorema lui Menelau:

$$\frac{|OB|}{|BA|} \cdot \frac{|AM|}{|MC|} \cdot \frac{|CP|}{|PO|} = 1, \text{ de unde } \frac{|CP|}{|PO|} = \frac{1}{2}. \text{ Analog din triunghiul } BOP \text{ cu transversala } AC \text{ avem}$$

$$\frac{|OA|}{|AB|} \cdot \frac{|BM|}{|MP|} \cdot \frac{|PC|}{|CO|} = 1, \text{ de unde } \frac{|BM|}{|MP|} = 3 \text{ și } \frac{|BP|}{|BM|} = \frac{4}{3}.$$

Locul geometric este cercul cu centrul O'

aparținând dreptei BO , astfel încât $\frac{|BO'|}{|BO|} = \frac{4}{3}$

și raza $O'P$, astfel încât $\frac{|O'P|}{R} = \frac{4}{3}$.

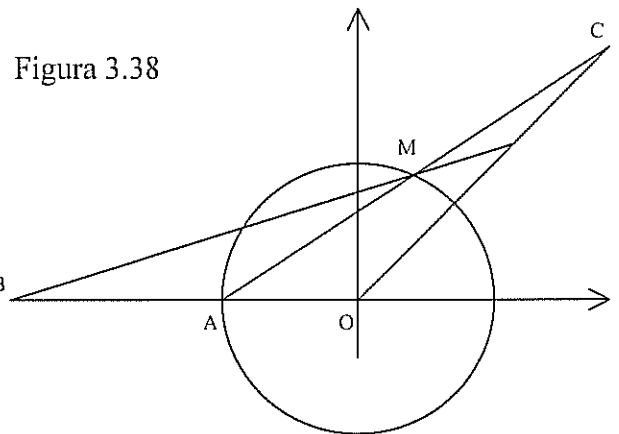


Figura 3.38

3. Omologiile lui Barbilian

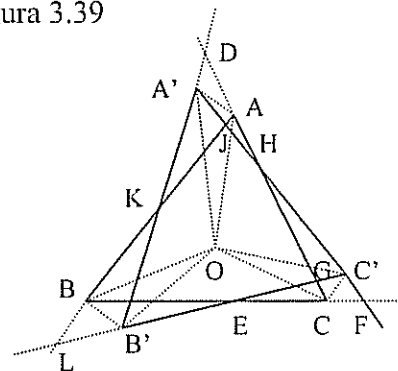
Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri echilaterale de același centru, cu vârfurile notate în același sens de rotație. Să se arate că triunghiurile sunt de trei ori omologice în ordinele: $(ABC, A'B'C')$; $(ABC, B'A'C')$; $(ABC, C'B'A')$.

Fie perechea $(\triangle ABC, \triangle C'B'A')$; pentru ca aceste triunghiuri să fie omologice (Figura 3.39), trebuie ca dreptele (AC', BB', CA') care unesc vârfurile corespunzătoare să fie concurente sau intersecțiile laturilor corespunzătoare $(L=AB \cap C'B', H=AC \cap C'A', D=BC \cap B'A')$ să fie coliniare. Pentru ca punctele H, D, L să fie coliniare, trebuie satisfăcută relația lui Menelau (privitor la triunghiul ABC):

$$\frac{|HA|}{|HC|} \cdot \frac{|CD|}{|DB|} \cdot \frac{|BL|}{|LA|} = 1 \quad (1)$$

Se consideră că $\triangle OAA' = \triangle OBB' = \triangle OCC'$, deci $AA' = BB' = CC'$; de asemenea, $\triangle JAA' = \triangle DBB' = \triangle GCC'$, deci $AJ = BD = CG$, de unde $GA = JB = DC$; cum $\triangle AHJ = \triangle BDK = \triangle CEG$, rezultă $AH = BK = CE$ și deci $HC = KA = EB$ (s-a avut în vedere că unghiul de rotație de la centru este întâlnit și între laturi; $\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC' = \angle AHA' = \angle BKB' = \angle CHC'$).

Figura 3.39



Folosind relația lui Menelau relativă la triunghiul ABC și secanta B'C': $\frac{|BL|}{|LA|} \cdot \frac{|AG|}{|GC|} \cdot \frac{|CE|}{|EB|} = 1$

se obține: $\frac{|BL|}{|LA|} = \frac{|GC| \cdot |EB|}{|AG| \cdot |CE|}$.

Valoarea acestui raport dusă în partea întâi a relației(1) și făcând simplificările cu segmente egale, se constată că o verifică.

Similar se stabilește și omologia triunghiurilor celorlalte perechi.

Problema a fost publicată în "Gazeta matematică" (1930), căreia autorul Dan Barbilian îi dăduse rezolvarea bazată pe teoria fasciculelor și a rapoartelor anarmonice.

4. Fie B' și C' mijloacele segmentelor [AC]. [AB]; D simediana lui B față de B', iar E simetricul lui C față de C'. Să se demonstreze că D, A, E sunt coliniare.

Soluție (Figura 3.40).

În patrulaterul AEBC diagonalele se taie în părți congruente, deci este paralelogram. Se obține: $AE \parallel BC$ (1)

În patrulaterul ADCCB, de asemenea diagonalele se taie în părți congruente, deci este paralelogram. Deci: $AD \parallel BC$ (2)

Din (1) și (2) rezultă că dreptele AD și AE coincid, adică punctele E, A, D sunt coliniare.

5. Se consideră două cercuri $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(O', R')$ secante în A și B. Fie C (respectiv C') punctul diametral opus lui A în cercul $\mathcal{C}(O, R)$ (respectiv $\mathcal{C}(O', R')$). Să se demonstreze că punctele C, B, C' sunt coliniare (Figura 3.41)

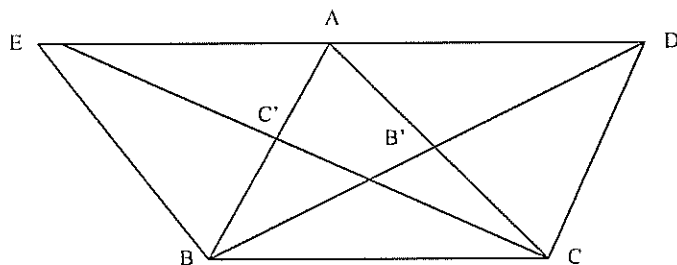


Figura 3.40

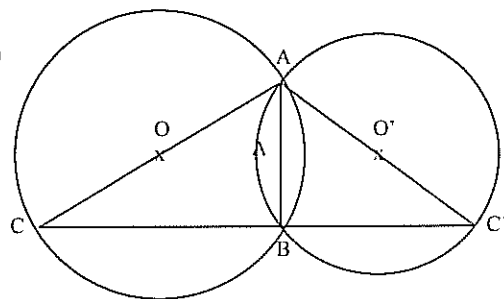


Figura 3.41

Soluție.

Se unește A cu B. Deoarece $m(\angle ABC) = m(\angle ABC') = 90^\circ$, rezultă $m(\angle ABC) + m(\angle ABC') = 180^\circ$, adică punctele C, B și C' sunt coliniare.

6. Fie M un punct arbitrar pe latura [BC] a unui triunghi ABC. Se notează cu M' și M'' simetricele punctului M față de dreptele AB și AC. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $m(\angle BAC) = 90^\circ$;
- (ii) M, A și M'' sunt coliniare.

Soluție.

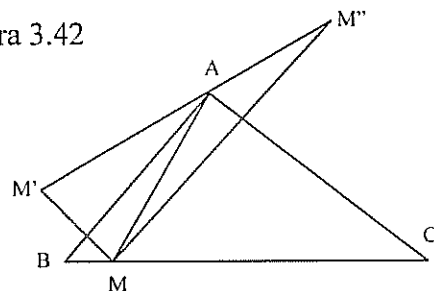
Triunghiurile MAM' și MAM'' sunt isoscele. Rezultă (Figura 3.42)

$\angle M'AB = \angle MAB$ și $\angle MAC = \angle CAM''$

(i) \Rightarrow (ii) dacă $m(\angle BAC) = 90^\circ$, rezultă $m(\angle M'AB) + m(\angle BAM) + m(\angle MAC) + m(\angle CAM'') = 2 \cdot m(\angle BAC) = 180^\circ$, deci punctele M', A și M'' sunt coliniare.

(ii) \Rightarrow (i) Dacă punctele M', A și M'' sunt coliniare, avem $m(\angle BAC) = m(\angle BAM) + m(\angle MAC) = \frac{1}{2} m(\angle M'AM) + \frac{1}{2} m(\angle MAM'') = \frac{1}{2} 180^\circ = 90^\circ$.

Figura 3.42



7. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}(O,R)$. Perpendiculara din B pe diametrul [AD] intersectează dreapta AD în E, iar cercul $\mathcal{C}(O,R)$ în F. Paralelele duse prin F la dreapta CD, respectiv dreapta CA, intersectează dreapta CA, respectiv dreapta CD în G, respectiv H. Să se demonstreze că punctele E, G și H sunt coliniare.

Soluție.

$AE \perp EF$; deoarece $FG \parallel CD$ și $CD \perp AC$, rezultă $FG \perp AC$; deoarece $m(\angle AEF) = m(\angle AGF) = 90^\circ$, rezultă că patrulaterul AEGF este înscritibil; se obține $\angle EGA = \angle EFA = \angle BCA$, deci (Figura 3.43):

$EG \parallel BC$ (1)

Paralelogramul CHFG este dreptunghi. Rezultă $\angle HGC = \angle FCG = \angle FCA$. Deoarece $BF \perp AE$, $\angle FCA = \angle ACB$

Prin urmare se obține $\angle HGC = \angle ACB$ ceea ce arată că: $GH \parallel BC$ (2)

Deoarece prin G se poate duce o unică paralelă la BC din (1) și (2) se obține că punctele E, G, H sunt coliniare.

8. Fie ABC un triunghi și o dreaptă oarecare d. Se proiectează vârfurile A, B, C pe d respectiv în punctele A', B', C'. Perpendicularele coborâte din A', B', C' pe laturile [BC], [CA], [AB] sunt concurente, iar punctul lor de intersecție poartă numele de ortopolul dreptei d față de triunghiul ABC.

Soluție (Figura 3.44).

Va trebui să se demonstreze că dreptele B'B'', C'C'', A'A'' sunt concurente. Se va folosi teorema lui Carnot.

Dacă se proiectează un punct M pe laturile unui triunghi ABC, în punctele A'', B'', C'', atunci există relația: $A''B^2 - A''C^2 + B''C^2 - B''A^2 + C''A^2 - C''B^2 = 0$ (1)

Reciproc dacă A'', B'', C'' sunt trei puncte pe laturile unui triunghi ABC, care satisfac relația (1), atunci perpendicularele în A'', B'', C'' pe laturi sunt concurente. Fie, în acest caz, A'', B'', C'' proiecțiile punctelor A', B', C' pe laturi. Picioarele perpendicularelor sunt proiecțiile lui M. Există relațiile:

$$A''B^2 - A''C^2 = A'B^2 - A'C^2 = A'B'^2 - A'C'^2 + BB'^2 - CC'^2$$

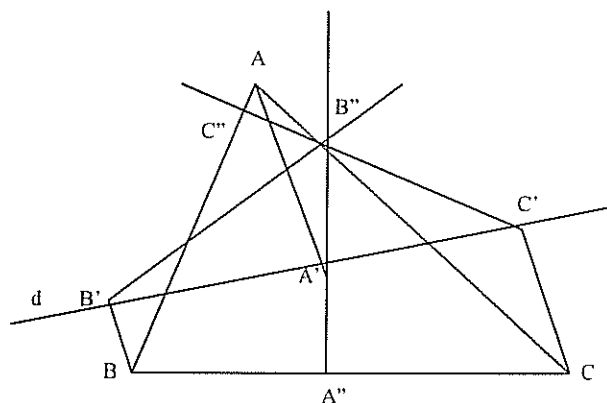
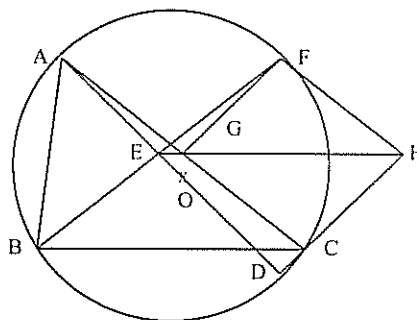
$$B''C^2 - B''A^2 = B'C^2 - B'A^2 = B'C'^2 - B'A'^2 + CC'^2 - AA'^2$$

$$C''A^2 - C''B^2 = C'A^2 - C'B^2 = C'A'^2 - C'B'^2 + AA'^2 - BB'^2$$

Adunând cele trei relații membru cu membru rezultă relația (1) este verificată și deci conform teoremei lui Carnot, B'B'', C'C'', A'A'' sunt concurente.

Figura 3.44.

Figura 3.43



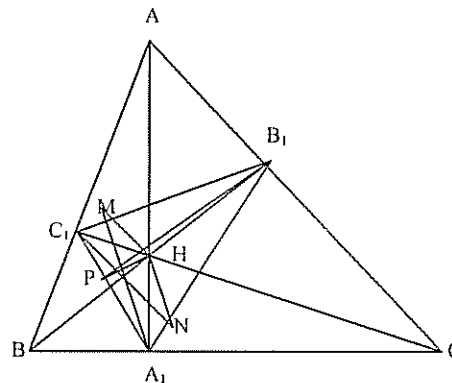
9. Într-un triunghi, punctul lui Gergonne al triunghiului ortic se află în punctul de intersecție al dreptelor care unesc picioarele înălțimilor triunghiului dat cu proiecțiile ortocentrului pe laturile triunghiului ortic.

Soluție (Figura 3.45)

Fie A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor triunghiului ABC. Cum A_1A, B_1B, C_1C (înălțimile triunghiului dat) sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului ortic, rezultă că ortocentrul triunghiului dat este centrul cercului înscris în triunghiul ortic.

Deci proiecțiile ortocentrului triunghiului dat pe laturile triunghiului ortic constituie punctele de contact la laturi ale cercului înscris în triunghiul ortic, ceea ce încheie demonstrația.

Figura 3.45



10. Într-un triunghi oarecare, raza cercului circumscris $[OA]$ este izogonală cu înălțimea h_a ce pleacă din același vârf.

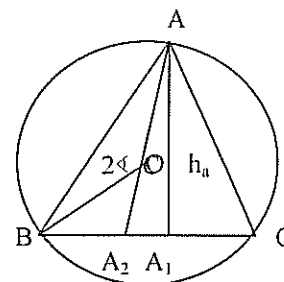
În figura 3.46, trebuie deci să arătăm că $\angle BAA_2 = \angle A_1AC$, A_2 fiind punctul pe dreapta BC obținut prin prelungirea razei $[OA]$.

$\angle A_1AC = \pi/2 - \angle C$ deoarece triunghiul AA_1C este dreptunghic. Triunghiul AOB este isoscel, deoarece $OA = OB = R$. unghiul AOB este unghi la centru, deci este egal cu $2 \cdot \angle C$.

Atunci, $\angle BAO = \angle ABO = \frac{\pi - 2 \cdot \hat{C}}{2} = \frac{\pi}{2} - \hat{C}$,

adică tot aceeași valoare cu a unghiului $\angle A_1AC$. Izogonalitatea este demonstrată.

Figura 3.46

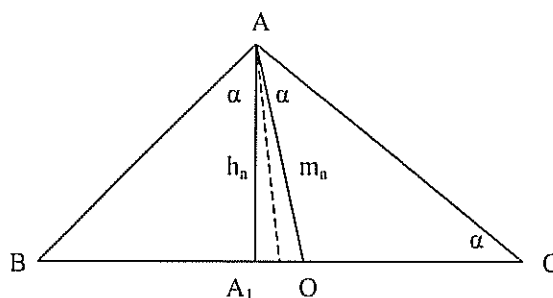


11. Mediana și înălțimea coborâte dintr-un vârf oarecare al triunghiului ABC fac cu laturile unghiului din care au fost coborâte, unghiuri egale. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

Dreptele m_a și h_a sunt izogonale. Să arătăm că acest lucru nu poate avea loc decât într-un triunghi dreptunghic (Figura 3.47). Triunghiul AOB este isoscel, deoarece $AO = OB = BC/2$, deci $\angle OAB = \angle OCA$.

Dar $\angle BAA_1 = \angle ACO$ fiindcă triunghiurile dreptunghice ABC și ABA_1 sunt asemenea, având un unghi comun ABA_1 . Prin urmare, în triunghiul dreptunghic ABC mediana m_a și înălțimea h_a sunt izogonale. Într-un triunghi oarecare, izogonală medianei este simediana. Dar simediana coincide cu înălțimea numai dacă triunghiul este dreptunghic.

Figura 3.47



CAPITOLUL IV

CERCURI REMARCABILE

4.1 Cercurile lui Appoloni

Teoremă.

Fie $[AD]$ și $[AD']$ bisectoarele interioare respectiv exterioare ale unghiului $\sphericalangle BAC$ al triunghiului neisoscel ABC . Locul geometric al punctelor M din planul triunghiului ABC pentru care $MB/MC = AB/AC$ este un cerc care trece prin punctele A , D și D' . (Acest cerc se numește cercul Appoloni al laturii $[BC]$).

Demonstrație (Figura 4.1).

Din teorema bisectoarei interioare rezultă $AB/AC = BD/DC$, de unde rezultă că $MB/MC = BD/DC$, deci $[MD]$ este bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle BMC$. Analog, folosind teorema bisectoarei exterioare și relația din enunț, se obține că $[MD']$ este bisectoarea exterioară pentru $\sphericalangle BMC$. Rezultă că $m\angle DMD' = 90^\circ$ și cum D și D' sunt fixe, M aparține cercului de diametru $[DD']$. Rezultă că $m(\sphericalangle DMD) = 90^\circ$ și cum D și D' sunt fixe, M aparține cercului de diametru $[DD']$.

Reciproc, se arată că orice punct M al cercului de diametru $[DD']$ satisface relația $MB/MC = AB/AC$. Se observă mai întâi că din teoremele bisectoarelor interioare și exterioare se obține egalitatea $DB/DC = D'B/D'C$.

Se construiesc paralelele BE , BE' , la MD , respectiv MD' (Figura 4.2)

Din teorema lui Thales în triunghiul EBC pentru paralela MD și în triunghiul $D'MC$ pentru paralela $E'B$, se obțin relațiile:

- (1) $ME/MC = DB/DC$ și
- (2) $ME'/MC = D'B/D'C$

Rezultă $ME = ME'$ și cum triunghiul EBE' este dreptunghic, ($m\angle (EBE') = 90^\circ$), se obține $ME = ME' = MB$.

Înlocuind în relația (1) pe ME cu MB și în relația (2) pe ME' cu MB , se obține că: $MB/MC = DB/DC = D'B/D'C = AB/AC$ (ultima egalitate provine din teorema bisectoarelor interioare și exterioare).

Analog se obțin cercurile lui Appoloni ale laturilor $[AC]$ și $[AB]$.

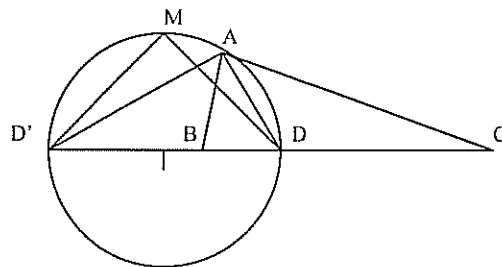


Figura 4.1

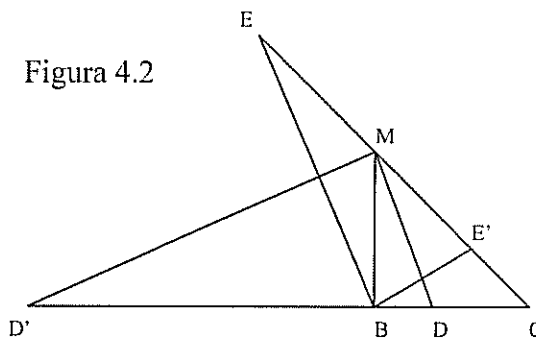


Figura 4.2

Teoremă

Cercurile lui Apolloniu fac parte dintr-un fascicol.

Demonstrație.

Se arată că centrele cercurilor lui Apolloniu se află pe dreapta lui Lemoine. Fie O_1 centrul cercului lui Apolloniu relativ la latura $[BC]$ (deci mijlocul segmentului $[DD']$).

Se arată că dreapta O_1A este tangentă la cercul circumscris triunghiului ABC , deci că $\angle O_1AB = \angle ACB$.

Într-adevăr, $m(\angle ADD') = 180^\circ - m(\angle ABC) - \frac{1}{2} m(\angle BAC)$ (din triunghiul ADB).

Rezultă: $m(\angle AD'D) = m(\angle ABC) + \frac{1}{2} m(\angle BAC) - 90^\circ$, deci

$$m(\angle O_1AB) = 90^\circ - m(\angle ABC) + \frac{1}{2} m(\angle BAC) - 90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle BAC) = m(\angle ACB)$$

Cum intersecțiile tangentelor la cercul circumscris triunghiului în vârfuri cu laturile opuse sunt trei puncte coliniare ce constituie dreapta lui Lemoine, teorema este demonstrată.

Din această demonstrație rezultă că cercurile lui Apolloniu sunt ortogonale cercului circumscris triunghiului.

Observație.

Fie Z_1 și Z_2 punctele comune ale cercurilor lui Apolloniu ale laturilor $[AB]$ și $[AC]$. Atunci: $Z_1A/Z_1C = BA/BC$ și $Z_1B/Z_1A = CB/CA$ ($i=1,2$)

Înmulțind cele două relații, se obține că: $Z_1B/Z_1C = AB/AC$

Rezultă că Z_1 și Z_2 aparțin și cercului lui Apolloniu al laturii $[BC]$.

Dreapta Z_1Z_2 este axa radicală a cercurilor lui Apolloniu.

Rezultă: Z_1Z_2 este perpendiculară pe dreapta lui Lemoine și $[Z_1Z_2]$ conține centrul cercului circumscris triunghiului ABC (este chiar diametru).

Z_1 și Z_2 se numesc centrele izodinamice ale triunghiului ABC .

Teoremă

Cercurile Apolloniu taie cercul circumscris după simediane.

Demonstrație (Figura 4.3).

Se consideră triunghiul ABC și cercul său circumscris, T, L, X punctele de intersecție a tangentelor la cercul circumscris din A și B , A și C , B și C respectiv, iar prin X se construiește o paralelă la dreapta TA ce intersectează dreapta AB în punctul D și dreapta AC în punctul E .

Deoarece

$\angle BDX = \angle TAB = \angle TBA = \angle DBX$, se obține $BX = XD$.

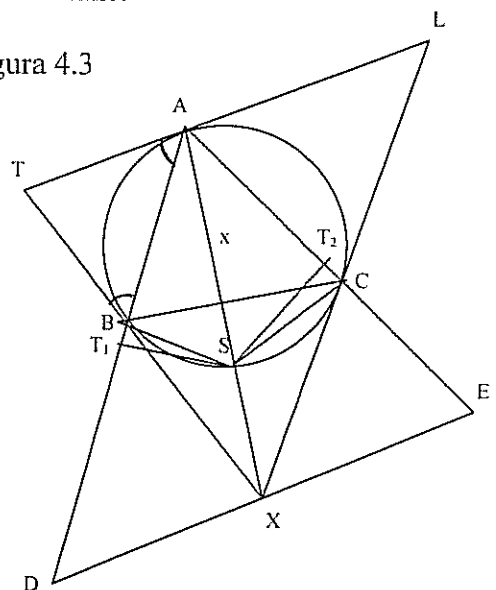
Analog $CX = XE$, deci $DX = XE$ (pentru că $XB = XC$).

Dar dreapta DE este antiparalelă la BC deoarece $\angle ADE = \angle ACB$, deci X se află pe simediana din A .

Fie S punctul de intersecție a simedianei AX cu cercul circumscris triunghiului ABC . Se demonstrează că $SB/SC = AB/AC$, deci S aparține cercului Apolloniu al laturii $[BC]$. Pentru aceasta se consideră T_1, T_2 proiecțiile lui S pe dreapta AB , respectiv dreapta AC .

Atunci $\angle SBT_1 = \angle SCT_2$ (deoarece patrulaterul $ABSC$ este inscriptibil), deci $ST_1/ST_2 = SB/SC$. Dar $ST_1/ST_2 = AB/AC$ (S fiind pe simediana din A) deci $SB/SC = AB/AC$.

Figura 4.3



Observație.

Din cele demonstrate rezultă că triunghiul format de tangente este omologic cu triunghiul dat, centrul de omologie fiind punctul lui Lemoine.

Axa de omologie, adică dreapta formată de intersecțiile laturilor opuse va fi dreapta lui Lemoine. Rezultă că dreapta lui Lemoine este polara trilineară a punctului lui Lemoine.

4. 2 Cercurile lui Tucker

Extremitățile a trei antiparalele egale ale triunghiului ABC, sunt pe același cerc.

Fie $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$, $[C_1C_2]$ trei antiparalele egale. Trapezul $A_1A_2C_1C_2$ este isoscel pentru că $[A_1A_2]=[C_1C_2]$ și $\angle A_1A_2C_1 = \angle A_2C_1C_2 = \pi - \angle B$ (Figura 4.18). Triunghiul format de mijloacele A' , B' , C' , ale celor trei antiparalele va avea deci laturile sale paralele la laturile triunghiului ABC.

Triunghiurile $A'B'C'$ și ABC sunt omotetice, iar centrul de omotetie este punctul simedian K deoarece dreptele AA' , BB' , CC' , care unesc vârfurile omoloage, sunt simedianele triunghiului ABC, pentru că ele unesc vârfurile cu mijlocul antiparalelelor. Pe de altă parte, perpendiculara coborâtă din A pe antiparalela A_1A_2 la dreapta BC, este izogonală înălțimii vârfului A; rezultă deci că ea trece prin centrul O al cercului ABC.

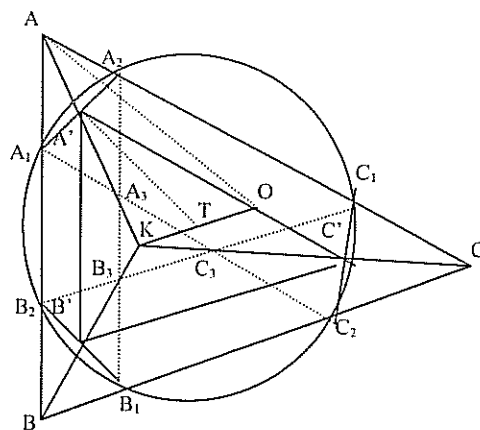


Figura 4.4

Urmează că perpendicularele coborâte din vârfurile A, B, C pe dreptele A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 se întâlnesc în centrul O al cercului ABC și, în consecință, perpendicularele în A' , B' , C' pe aceleași drepte se întâlnesc și ele în centrul T al cercului triunghiului $A'B'C'$, din cauza omotetiei.

Punctul T este egal depărtat de cele trei coarde egale $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$, $[C_1C_2]$. El este deci centrul unui cerc care trece prin extremitățile lor și care este numit cercul lui Tucker.

Proprietăți

1. Triunghiurile $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sunt egale între ele și asemenea cu triunghiul de referință ABC.

Într-adevăr, în cercul lui Tucker avem: $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_2C_1 = \angle ABC$.

Pe de altă parte, avem, de exemplu $[A_1B_1]=[A_2B_2]$, ca diagonale ale trapezului isoscel $A_1A_2B_1B_2$.

2. Un cerc Tucker formează cu laturile triunghiului ABC trei coarde paralele la laturi și trei coarde antiparalele.

Coardele paralele sunt $[A_1C_2]$, $[B_1A_2]$, $[C_2C_1]$, iar coardele antiparalele sunt $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$, $[C_1C_2]$. Am mai remarcat această proprietate la toate cercurile precedente care nu sunt de altfel decât cercuri particulare, aparținând familiei de cercuri Tucker.

3. Centrul de omotetie a triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ este punctul simedian, căci dreptele AA' , BB' , CC' sunt simedianele triunghiului ABC.

4. Locul centrelor T ale cercurilor Tucker este dreapta OK, căci dreapta OT, care unește două puncte omoloage, trece prin centrul de omotetie K.

5. Coardele $[B_2C_1]$, $[C_2A_1]$, $[A_2B_1]$ determină un triunghi omotetic cu ABC.

Într-adevăr, însemnând prin A_3 punctul de întâlnire al dreptelor A_1C_2 și B_1A_2 , figura $AA_1A_3A_2$ este un paralelogram și în consecință dreapta AA' va trece și ea prin A_3 și va fi simediană.

Se poate defini cercul Tucker ca un cerc care trece prin punctele de întâlnire a laturilor a două triunghiuri cosimediane. Este ușor, de altfel, să demonstrăm că două triunghiuri cosimediane sunt neapărat omotetice și, în consecință, nimerim două triunghiuri cum sunt ABC și $A_3B_3C_3$.

6. Cercurile Tucker particulare:

a) Primul cerc Lemoine se obține ca un caz particular, când triunghiul $A'B'C'$ se reduce la punctul K ; am văzut că antiparalelele $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$, $[C_1C_2]$, sunt egale și că centrul T este mijlocul lui $[OK]$.

b) Al doilea cerc Lemoine este de asemenea un cerc Tucker, căci antiparalelele $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$, $[C_1C_2]$, sunt egale. Acesta este cercul Tucker pentru care antiparalelele sunt egale și concurente.

c) Cercul Taylor este de asemenea un cerc Tucker, pentru că am văzut că antiparalelele $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$, $[C_1C_2]$ sunt egale.

4.3 Cercurile lui Lemoine

Primul cerc al lui Lemoine

Antiparalelele duse prin punctul lui Lemoine K la laturi sunt egale și au un mijlocul lor comun în acest punct; atunci prin extremitățile lor trece un cerc cu centrul în K .

Demonstrație (Figura 4.5)

Simedianele fiind concurente în K , conform teoremei lui L'Huilier, antiparalelele duse prin K la laturi au mijlocul lor comun în acest punct. Rămâne de demonstrat că $C'B' = C''A''$. Deoarece unghiurile $\sphericalangle B'C'A$ și $\sphericalangle BC''A''$ sunt congruente cu $\sphericalangle C$, rezultă că triunghiul $C''KC'$ este isoscel, deci $A''C'' = B'C'$.

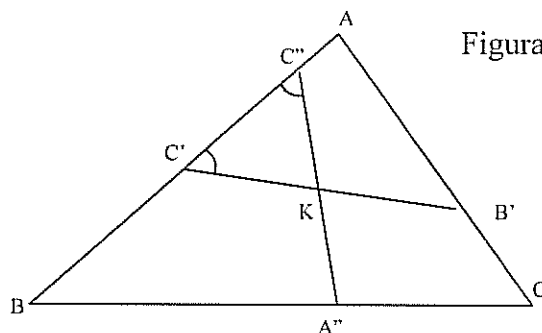


Figura 4.5

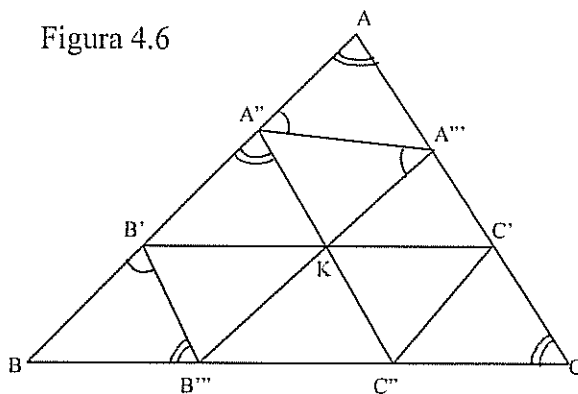
Al doilea cerc al lui Lemoine

Paralelele duse din centrul simedian la laturile triunghiului taie laturile în șase puncte conciclice

Demonstrație (Figura 4.6)

Fie dreptele $B'C'$, $A''C''$, $A'''B'''$ cele trei paralele. Se consideră segmentele $[A''A''']$, $[B'B''']$, $[C'C'']$ și se arată că ele sunt antiparalele cu laturile triunghiului. De exemplu, $[A''A''']$ se arată că este antiparalelă la dreapta BC . Se observă mai întâi că patrulaterul $AA''KA'''$ este paralelogram, deci $[AK]$ și $[A''A''']$ se înjumătățesc prin punctul lor de intersecție. Rezultă că dreapta $A''A'''$ este antiparalelă la dreapta BC . Analog se demonstrează că dreptele $B'B'''$ și $C'C''$ sunt antiparalele la dreptele AC , respectiv AB .

Figura 4.6



Deci patrulaterul $A''A'''B'''B'$ este trapez isoscel, unghiurile din A''' și B''' sunt congruente cu unghiul \hat{C} . Patrulaterul $A''B'B'''C''$ este de asemenea inscriptibil deoarece unghiurile din $\sphericalangle A''$ și $\sphericalangle B'''$ sunt suplementare. Patrulaterul $B'B'''C''C'$ fiind trapez isoscel, rezultă că toate cele șase puncte sunt situate pe același cerc.

4.4 Teorema lui Schömilch.

Dreptele care unesc mijloacele laturilor și mijloacele înălțimilor unui triunghi sunt concurente în punctul lui Lemoine.

Demonstrație (Figura 4.7)

Păstrând notațiile de la primul cerc al lui Lemoine, se observă că patrulaterul $C'C''B'A''$ este un dreptunghi cu centrul K și $[A''B']$ paralel cu $[AB]$. Dar locul geometric al centrelor

dreptunghiurilor cu o latură paralelă cu una din laturile unui triunghi dat și înscris în acel triunghi este dreapta care unește mijlocul laturii și mijlocul înălțimii perpendiculare pe latură

Proprietăți

1. Laturile triunghiului sunt împărțite simetric de primul cerc al lui Lemoine și în segmente proporționale cu a^2, b^2, c^2 .

Într-adevăr, avem:

$AA_1/A_1B_2 = C_1K/KB_2 = b^2/c^2$;
 $A_1B_2/B_2B = A_1K/KC_2 = c^2/a^2$ și prin urmare:
 $BB_2/a^2 = AA_1/b^2 = A_1B_2/c^2$. Același raționament pentru celelalte laturi.

2. Coardele $[C_2B_1], [A_2C_1], [B_2A_1]$ sunt proporționale cu a^3, b^3, c^3 .

Într-adevăr, avem $BB_2/a^2 = AA_1/b^2 = A_1B_2/c^2 = c/(a^2+b^2+c^2)$, prin urmare: $A_1B_2 = c^3/(a^2+b^2+c^2)$. Din cauza acestei proprietăți, autorii englezi numesc de asemenea acest cerc "the triplicate ratio circle".

3. Triunghiurile înscrise $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ sunt asemenea cu triunghiul ABC și egale între ele.

Într-adevăr, în cercul lui Lemoine, avem: $\sphericalangle B_1C_1A_1 = \sphericalangle C$, $\sphericalangle B_2C_2A_2 = \sphericalangle C$. Triunghiurile sunt prin urmare asemenea cu triunghiul ABC . Pe de altă parte avem evident $[A_1B_1] = [A_2B_2]$ pentru că trapezul $A_1A_2B_1B_2$ este isoscel.

4. Centrul primului cerc al lui Lemoine este la mijlocul lui $[OK]$. Antiparelele $[A_1A_2], [B_1B_2], [C_1C_2]$ sunt egale, pentru că trapezul $A_1A_2B_1B_2$, de exemplu, este isoscel.

5. Centrul celui de al doilea cerc Lemoine este punctul K .

6. Coardele $[C_2B_1], [A_2C_1], [B_2A_1]$ sunt proporționale cu cosinusurile unghiurilor triunghiului ABC .

Într-adevăr, triunghiul isoscel KB_2A_1 ne dă: $\frac{1}{2}B_2A_1 = KB_2 \cdot \cos \sphericalangle A_1B_2K = KB_2 \cdot \cos C$. Prin urmare, însemnând prin ρ_2 raza $[KB_2]$ a cercului Lemoine, vom avea:
 $C_2B_1/\cos A = A_2C_1/\cos B = B_2A_1/\cos C = 2\rho_2$

Din cauza acestei proprietăți, autorii englezi numesc acest cerc, "The cosine circle".

7. Triunghiurile înscrise $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ au laturile lor respectiv paralele între ele și perpendiculare la laturile triunghiului de referință.

Segmentele $[B_1B_2], [C_1C_2]$ fiind diametre, unghiurile $\sphericalangle C_1B_1C_2, \sphericalangle B_2C_2B_1$ sunt drepte și prin urmare dreptele C_1B_1, C_2B_2 sunt paralele între ele și perpendiculare pe dreapta BC .

8. Dreptele B_2C_1, C_2A_1, A_2B_1 sunt paralele cu laturile triunghiului ABC , pentru că figura $A_1C_1A_2C_2$ este un dreptunghi.

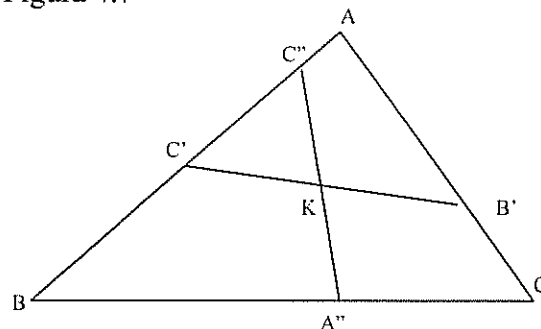
Proiecțiile picioarelor înălțimilor.

Să stabilim mai întâi câteva proprietăți preliminare. Fie $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ proiecțiile picioarelor H_a, H_b, H_c a înălțimilor, respectiv pe dreptele $AB, AC; BC, BA; CA, CB$ (Figura 4.8).

1. Segmentele $[A_1A_2], [B_1B_2], [C_1C_2]$ sunt antiparalele respectiv cu laturile BC, CA, AB . Într-adevăr, dreptele C_1C_2, H_aH_b sunt paralele pentru că unesc proiecțiile pe aceleași laturi a două puncte de pe înălțimea $[CH_c]$.

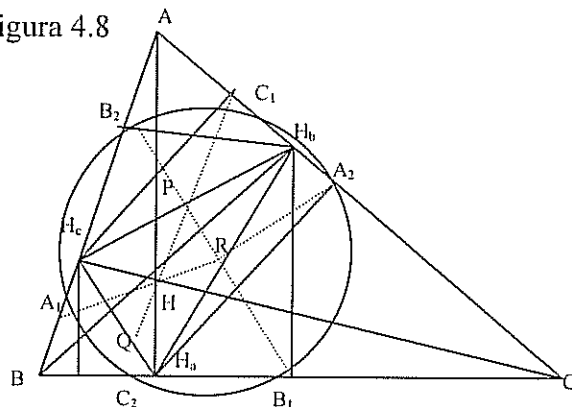
2. Dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 trec prin mijlocul laturilor triunghiului ortic. Ele formează prin urmare triunghiul complementar al triunghiului ortic. Într-adevăr, în triunghiul dreptunghic $C_1H_bH_c$, avem: $\sphericalangle C_2C_1H_b = \sphericalangle H_cH_bC_1 = \sphericalangle ABC$.

Figura 4.7



Dreapta C_1C_2 trece prin urmare prin mijlocul P al ipotenuzei $[H_bH_c]$. Se va observa de asemenea că în triunghiul dreptunghic $H_cC_2H_a$, dreapta C_1C_2 trece prin mijlocul Q al ipotenuzei $[H_cH_a]$.

Figura 4.8



3. Segmentele $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$, $[C_1C_2]$ sunt egale între ele.

Într-adevăr, avem: $C_1C_2 = C_1P + PQ + QC_2 = \frac{1}{2} \cdot H_cH_b + \frac{1}{2} \cdot H_bH_c + \frac{1}{2} \cdot H_aH_c$. Rezultă că segmentul $[C_1C_2]$ și prin urmare analoagele sale $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$ sunt egale cu semiperimetrul triunghiului ortic, și prin urmare, egale între ele.

4. Dreptele B_2C_1 , A_1C_2 , B_1A_2 sunt paralele cu laturile triunghiului de referință. Într-adevăr, dreptele B_2C_1 și BC sunt amândouă antiparalele cu latura H_bH_c .

4.5 Cercul lui Taylor

Teoremă.

Se consideră un triunghi ABC și fie $A_1 = \text{pr}_{BC}A$, $A_2 = \text{pr}_{AB}A_1$, $A_3 = \text{pr}_{AC}A_1$. Analog se obțin punctele B_1, B_2, B_3 și C_1, C_2, C_3 . Punctele $A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ se află pe un același cerc (numit cercul lui Taylor).

Demonstrație.

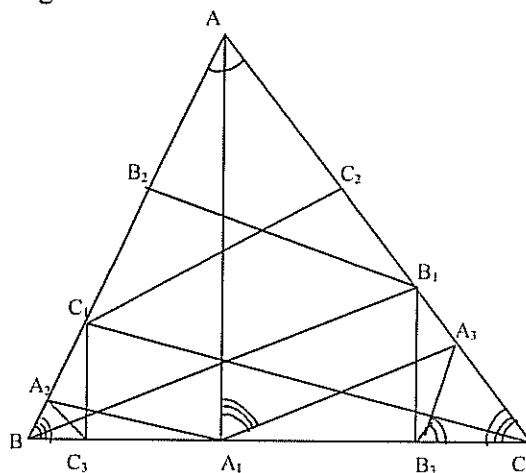
Se arată că punctele B_2, C_2, A_3 se află pe cercul determinat de punctele A_2, B_3, C_3 . Se demonstrează mai întâi că A_3 se află pe cercul circumscris triunghiului $A_2B_3C_3$, adică se arată că patrulaterul $A_2B_3C_3A_3$ este inscriptibil. Este ușor de văzut că patrulaterul $B_1A_1B_3A_3$ este inscriptibil, deci dreapta B_3A_3 este antiparalelă la dreapta B_1A_1 . Cum dreapta A_1B_1 este antiparalelă la dreapta AB , rezultă că dreapta B_3A_3 este paralelă cu dreapta BA , deci $\angle A_3B_3C \equiv \angle ABC$. Analog se obține $\angle C_3A_2B \equiv \angle BAC$. Deoarece patrulaterul $AA_2A_1A_3$ este inscriptibil, rezultă $\angle AA_1A_3 \equiv \angle AA_2A_3$. În plus, deoarece $\angle AA_1A_3 \equiv \angle ACB$ (au același complement $\angle A_1AA_3$), rezultă $\angle ACB \equiv \angle AA_2A_3$.

Prin urmare dreapta A_2A_3 este antiparalelă la dreapta BC . Se obține $\angle A_3A_2C_3 \equiv \angle ABC$.

Cum $\angle A_3B_3C \equiv \angle ABC$, se deduce că $\angle A_3A_2C_3 \equiv \angle A_3B_3C$.

Deci: $m(\angle A_3A_2C_3) + m(\angle A_3B_3A_1) = 180^\circ$, adică patrulaterul $A_3A_2C_3B_3$ este inscriptibil. Prin urmare punctul A_3 aparține cercului circumscris triunghiului $A_2B_3C_3$. Analog se arată că punctele C_2 și A_3 se află pe cercul determinat de punctele A_2, B_3 și C_3 .

Figura 4.9



4.6 Triunghiul și cercul lui Brocard. Proprietăți

Fie A_1, B_1, C_1 punctele unde paralelele lui Lemoine întâlnesc respectiv mediatoarele triunghiului. Triunghiul $A_1B_1C_1$ se numește primul triunghi a lui Brocard.

Fie A_2, B_2, C_2 proiecțiile lui O pe simedianele triunghiului. Triunghiul $A_2B_2C_2$ este al doilea triunghi Brocard.

Se numește cercul Brocard, cercul care are pe $[OK]$ drept diametru (Figura 4.10).

Cercul Brocard este circumscris celor două triunghiuri Brocard pentru că, de exemplu, unghiurile $\sphericalangle OA_1K, \sphericalangle OA_2K$ sunt drepte.

Proprietăți.

1. Triunghiurile AB_1C, BC_1A, CA_1B sunt trei triunghiuri isoscele asemenea.

Într-adevăr, dacă A', B', C' sunt mijloacele laturilor, lungimile $[A_1A'], [B_1B'], [C_1C']$ sunt egal cu distanțele x, y, z ale lui K la laturi. Avem prin urmare: $A_1A'/a = B_1B'/b = C_1C'/c$ și în consecință $A_1A'/A'B = B_1B'/B'C = C_1C'/C'A$, ceea ce ne arată că triunghiurile dreptunghice $BA'A_1, CB'B_1, AC'C_1$ sunt asemenea.

2. Dreptele AB_1, BC_1, CA_1 se întâlnesc într-un punct Brocard.

Într-adevăr, în triunghiul AB_1B' avem: $\operatorname{tg} \sphericalangle B_1AB' = 2y/b = \operatorname{tg} \omega$, în consecință, $\sphericalangle B_1AB'$ este egal cu unghiul lui Brocard.

Rezultă deci că dreptele AB_1, BC_1, CA_1 sunt ceviane care determină unul din punctele lui Brocard. Se demonstrează la fel că dreptele A_1B, B_1C, C_1A se întâlnesc în celălalt punct a lui Brocard.

3. Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

Într-adevăr, să prelungim paralela lui Lemoine dreapta C_1K până ce ea întâlnește în L și M laturile unghiului C . Mijlocul segmentului $[LM]$ este proiecția mijlocului lui $[OK]$, centrul primului cerc al lui Lemoine. La fel mijlocul coardei $[C_1K]$ a cercului Brocard este proiecția aceluiași punct, pentru că cercul Brocard este concentric cu cercul lui Lemoine. Rezultă că segmentele $[KM]$ și $[C_1L]$ sunt egale și în consecință dreapta CC_1 este izotomica simedianei CK .

Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 se întâlnesc prin urmare în punctul izotomic al punctului simedian.

4. Primul triunghi Brocard este asemenea cu triunghiul de referință.

Într-adevăr, unghiurile sub care se văd de pe cercul lui Brocard și din punctul K , laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ sunt egale cu $\pi - \hat{A}, \hat{B}$ și \hat{C} . Triunghiurile sunt deci asemenea.

5. Cercul lui Brocard trece prin punctele Brocard.

Într-adevăr, unghiurile $\sphericalangle CA_1A'$ și $\sphericalangle AB_1B'$ sunt egale pentru că ele aparțin triunghiurilor asemenea. Prin urmare unghiurile $\sphericalangle OA_1\Omega'$ și $\sphericalangle OB_1\Omega'$ sunt suplementare și în consecință patrulaterul $OB_1A_1\Omega$ este inscriptibil.

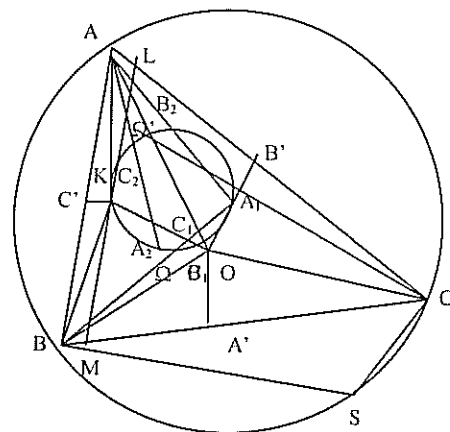
6. Punctele Brocard sunt simetrice în raport cu diametrul OK .

Într-adevăr, avem pe cercul Brocard, $\sphericalangle \Omega OK = \sphericalangle \Omega B_1K$ pe de altă parte, din cauza paralelismului dreptelor KB_1 și AC , urmează $\sphericalangle \Omega B_1K = \sphericalangle \Omega CA = \omega$. Prin urmare, unghiul $\sphericalangle \Omega OK = \omega$. La fel: $\sphericalangle \Omega'OK = \sphericalangle \Omega'A_1K = \sphericalangle \Omega'CB = \omega$, ceea ce ne arată că punctele lui Ω și Ω' sunt simetrice în raport cu OK .

6. Punctele lui Steiner și Tarry.

Dacă prin vârfurile unui triunghi se duc paralele la laturile respective ale primului triunghi Brocard, aceste drepte se întâlnesc în același punct, situat pe cercul circumscris, care se numește punctul lui Steiner al triunghiului.

Figura 4.10



Într-adevăr, să considerăm cevienele BS și CS, respectiv paralele cu dreptele C_1A_1 și A_1B_1 . Avem: $\sphericalangle BSC = \pi - \sphericalangle B_1A_1C_1 = \pi - \sphericalangle A$. Prin urmare punctul S se găsește pe cercul circumscris. Se va arăta la fel că punctul de întâlnire a dreptei BS cu paralela la dreapta B_1C_1 dusă prin C este situat de asemenea pe cercul circumscris și coincide în consecință cu S.

Acest punct se numește punctul Steiner al triunghiului ABC.

7. Punctul Steiner și punctul simedian K sunt două puncte omoloage în triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$.

Într-adevăr, fiecare este situat pe cercul circumscris triunghiului său. Pe de altă parte avem: $\sphericalangle SBC = \pi - \sphericalangle KA_1C_1 = \sphericalangle KB_1C_1$.

8. Perpendicularele coborâte din vârfurile unui triunghi pe laturile respective ale primului triunghi Brocard sunt concurente.

Ele se întâlnesc evident în punctul T, diametral opus lui S. Punctul T, numit punctul Tarry, și centrul O al cercului circumscris sunt două puncte omoloage în triunghiurile asemenea ABC și $A_1B_1C_1$.

Într-adevăr, ele sunt diametral opuse punctelor omologice S și K.

9. Proprietățile vârfurilor celui de-al doilea triunghi Brocard.

Punctul A_2 se găsește pe cercul BOC. Într-adevăr, simediana AK trece prin polul P al dreptei BC în raport cu cercul circumscris. Dar acest pol este punctul diametral opus lui O în cercul BOC. Prin urmare, deoarece după definiție $\sphericalangle OA_2K = \pi/2$, punctul A_2 se găsește pe BOC.

10. Punctul A_2 se găsește la intersecția cercurilor adjuncte vârfului A. În cercul BOCP, avem:

$\sphericalangle BA_2P = \sphericalangle BCP = \sphericalangle A$. Prin urmare, cercul BA_2A este tangent în A laturii AC. Aceeași demonstrație pentru celălalt cerc.

Se poate, prin urmare, spune: cercurile adjuncte unui vârf și cercul coordonat al lui O în raport cu laturile opuse se întâlnesc în același punct. Acest punct este un vârf al celui de-al doilea triunghi Brocard.

11. Coordonatele unghiulare ale lui A_2 sunt $2A$, $\pi - A$, $\pi - A$ după cum rezultă din ultima propoziție. Coordonatele lui B_2 și C_2 se vor obține schimbând A prin B și C.

12. Dreapta OA_2 trece prin centrul cercului lui Apolloniu al laturii BC, căci acest centru este polul lui [AK] în raport cu cercul circumscris și dreapta OA_2 este perpendiculară pe dreapta AK.

13. Punctele A_2 , B_2 , C_2 sunt cele trei pivoturi care împreună cu O, Ω și Ω' dau triunghiurile înscrise asemenea cu ABC.

Se mai pot denumi aceste șase puncte sub numele generic de pivoturi de asemănare.

Cu ajutorul definiției precedente, se poate spune: Cele șase pivoturi de asemănare ale unui triunghi sunt pe același cerc, cercul lui Brocard.

14. Tripletul izogonal al celui de-al doilea triunghi a lui Brocard. Coordonatele unghiulare ale lui A_2 , B_2 , C_2 , punctele izogonale ale lui A_2 , B_2 , C_2 , sunt: $\pi - \sphericalangle A$, $\pi - \sphericalangle B$, $\pi - \sphericalangle C$; $\pi - \sphericalangle C$, $\pi - \sphericalangle B$, $\pi - \sphericalangle A$; $\pi - \sphericalangle B$, $\pi - \sphericalangle A$, $\pi - \sphericalangle C$.

15. Punctul A_2' este situat prin urmare pe cercul BHC; el se află de asemenea la intersecția cercurilor adjuncte laturii BC.

Aceste trei cercuri se întâlnesc prin urmare în același punct.

16. Punctele A_2' , B_2' , C_2' sunt situate pe medianele triunghiului, căci dacă vom însemna prin A' punctul unde dreapta AA_2' taie dreapta BC, avem: $A'A_2' \cdot A'A = A'B^2 = A'C^2$, de unde rezultă $A'B = A'C$.

17. Ele sunt proiecțiile ortocentrului de mediane, pentru că dacă se prelungește mediana până la al doilea punct Q cu cercul BHC, punctele Q și H sunt diametral opuse. Rezultă că triunghiul $A_2'B_2'C_2'$ este înscris în cercul cu diametrul [GH] și este asemenea cu triunghiul medial. Această ultimă proprietate rezultă din faptul că unghiurile triunghiului $A_2'B_2'C_2'$ sunt suplimentare coordonatelor unghiulare ale centrului de greutate; într-adevăr, avem pe cercul GH, $\sphericalangle B_2'A_2'$

18. Triunghiurile echibrocardiene. Dacă două triunghiuri au același unghi Brocard, ele sunt echibrocardiene

Toate triunghiurile formate de trei omoloage sunt echibrocardiene.

4.7 Cercurile Neuberg

Printre triunghiurile echibrocardiene din plan, considerăm familia triunghiurilor care au două vârfuri fixe. Locul celui de-al treilea vârf este un cerc.

Într-adevăr, fie ABC un triunghi al familiei și B, C vârfurile fixe. Să considerăm arcul capabil de un unghi ω descris pe dreapta BC de aceeași parte cu A și A' punctul de întâlnire al acestui cerc cu dreapta AB. Fie A₁ piciorul [A Ω] pe dreapta BC. Dreptele AA₁ și A'C sunt paralele, avem deci: $AB/AA' = BA_1/A_1C = c^2/a^2$, de unde rezultă: $AA' \cdot AB = a^2$.

Puterea lui A în raport cu cercul BA'C este prin urmare constantă: în consecință, locul lui A va fi un cerc concentric. Locul complet se compune din două cercuri simetrice în raport cu dreapta BC, căci trebuie să mai considerăm arcul descris pe dreapta BC de cealaltă parte. Fiind dat un triunghi ABC, există trei familii de triunghiuri echibrocardiene care au cu ABC două vârfuri comune. Locul celui de-al treilea vârf al lor se compune prin urmare din trei cercuri care poartă numele de cercurile lui Neuberg. Simetricele acestor cercuri în raport cu laturile triunghiului sunt de asemenea cercuri Neuberg. Pentru a preciza lucrurile, numim cercurile Neuberg ale unui triunghi ABC cercurile Neuberg care trec fiecare prin unul din vârfurile triunghiului.

Proprietățile cercurilor Neuberg

1. Un cerc Neuberg trece prin șase vârfuri de triunghiuri asemenea cu triunghiul ABC care au cu ABC o latură comună BC și al căror al treilea vârf este situat de aceeași parte a dreptei BC.

Aceste triunghiuri au în mod evident același unghi Brocard căci ele au aceleași unghiuri.

Pentru a obține cele șase vârfuri se poate proceda astfel: Să ducem dreptele BA' și CA'' care formează, de aceeași parte cu dreapta BC, unghiul A și să însemnăm prin A_b și A_c punctele unde aceste drepte întâlnesc respectiv dreptele AC și AB. Punctele A_b și A_c sunt două din vârfurile căutate; într-adevăr, triunghiul BCA_b are unghiurile A, B, C și triunghiul BCA_c are drept unghiuri B, A, C.

Dacă vom lua simetricele lui A, A_b și A_c în raport cu mediatoarea laturii BC, se obțin încă trei noi vârfuri A', A_b' și A_c'. Este evident că cele șase puncte sunt singurele care răspund la problemă, căci nu se poate face o altă combinație cu unghiurile B și C.

2. Punctele unde cercul Neuberg ce trece prin A întâlnește din nou laturile triunghiului se găsește pe cercurile adjunkte triunghiului ABC, tangente la dreapta BC. Aceste puncte sunt tocmai A_b și A_c.

Să considerăm cercul ABA_b; el este tangent în B la dreapta BC, căci: $\sphericalangle BA_bA = \hat{B}$.

3. Puterile vârfurilor B și C, în raport cu cercul Neuberg relativ, sunt egale cu a^2 , căci în cercul adjunct ABA₁ avem: $CA \cdot CA_b = a^2$.

4. Razele cercurilor lui Neuberg. Fie N_a centrul și n_a raza cercului Neuberg ce trece prin A. În triunghiul dreptunghic, avem $\sphericalangle BN_aC = 2\omega$, căci N_a este centrul arcului capabil de unghi ω , descris pe dreapta BC. Rezultă că $BN_a^2 = a^2/2\sin\omega$.

Pe de altă parte, puterea lui B în raport cu cercul Neuberg este egală cu $BN_a^2 - n_a^2$. Vom avea deci: $a^2 = a^2/4\sin^2\omega - n_a^2$, de unde $n_a^2 = a^2(1 - 4\sin^2\omega)/\sin^2\omega$, $n_a = \sqrt{1 - 4\sin^2\omega} / \sin\omega$.

Razele cercurilor Neuberg sunt prin urmare proporționale cu laturile; avem:

$$\frac{a}{n_a} = \frac{b}{n_b} = \frac{c}{n_c} = \frac{\sin\omega}{\sqrt{1 - 4\sin^2\omega}}.$$

5. Distanțele centrelor N_a, N_b și N_c până la centrul O al cercului circumscris sunt proporționale cu cuburile laturilor.

Într-adevăr, în triunghiul ON_aB, avem: $ON_a/\sin(A-\omega) = R/\sin\omega$
 $ON_a = R \cdot \sin(A-\omega)/\sin\omega = a^2R/bc = a^3 \cdot S.$

6. Avem $ON_a \cdot ON_b \cdot ON_c = R^3$, căci produsul este egal cu $a^3 b^3 c^3 / 64 S^3 = R^3$.

4.8 Teorema lui Țițeica

Trei cercuri $\mathcal{C}(O_1, R)$, $\mathcal{C}(O_2, R)$, $\mathcal{C}(O_3, R)$ au un punct comun. Luându-le două câte două, se obțin încă trei puncte de intersecție A, B, C. Cercul determinat de punctele A, B, C are raza egală cu R.

Demonstrația 1.

Fie H punctul comun celor trei cercuri (Figura 4.11). patrulaterul O_3AO_2H este romb, deoarece $AO_3=O_2H=R=AO_2=O_3H$. De asemenea patrulaterul O_1BO_3H este romb. Rezultă $AO_2 \parallel O_3H \parallel BO_1$ și deoarece $AO_2=BO_1=R$, se obține că patrulaterul ABO_1O_2 este paralelogram. Deci, $AB=O_1O_2$. Analog se obține $BC=O_2O_3$ și $CA=O_3O_1$. Prin urmare triunghiurile ABC și $O_1O_2O_3$ sunt congruente. Rezultă că cercurile circumscrise triunghiurilor ABC și $O_1O_2O_3$ sunt congruente. Centrul cercului circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$ are centrul în punctul H și raza $HO_1=HO_2=HO_3=R$. Prin urmare cercul determinat de punctele A, B, C are raza R.

Figura 4.11

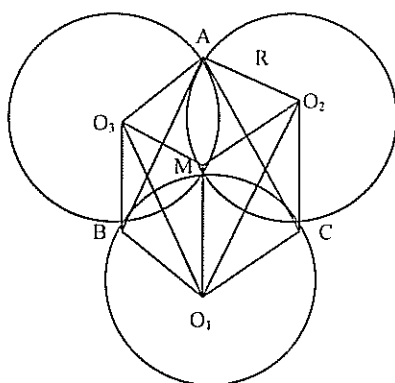
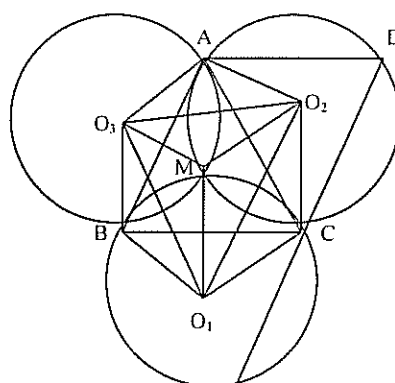


Figura 4.12



Demonstrația 2.

Paralela dusă prin C la dreapta AB intersectează cercul $\mathcal{C}(O_2, R)$ în punctul D (Figura 4.12)

Deci : $m(\sphericalangle ADC) = m(\sphericalangle ADH) + m(\sphericalangle HDC) = m(\sphericalangle ABH) + m(\sphericalangle HBC) = m(\sphericalangle ABC)$. Rezultă că patrulaterul ABCD este paralelogram. Triunghiurile ABC și ADC fiind congruente, rezultă că cercul circumscris triunghiului ABC este congruent cu cercul $\mathcal{C}(O_2, R)$ circumscris triunghiului ADC.

Demonstrația 3 (Figura 4.13).

Se consideră un reper cartezian având ca origine punctul H, comun celor trei cercuri date și fie Z_1, Z_2, Z_3 afixele punctelor O_1, O_2, O_3 . Mijloacele segmentelor $[O_1O_2]$, $[O_1O_3]$ și $[O_2O_3]$ au respectiv afixele $(Z_1+Z_2)/2$, $(Z_1+Z_3)/2$ și $(Z_2+Z_3)/2$. Rezultă că punctele A, B și C au respectiv afixele Z_2+Z_3 , Z_1+Z_3 și Z_1+Z_2 . Deci: $AB = |Z_1+Z_3 - Z_2 - Z_3| = |Z_1 - Z_2| = O_1O_2$

Analog se obține $BC=O_2O_3$ și $AC=O_1O_3$. Prin urmare triunghiurile ABC și $O_1O_2O_3$ sunt congruente. Deci cercul circumscris triunghiului ABC are raza egală cu R.

Figura 4.13

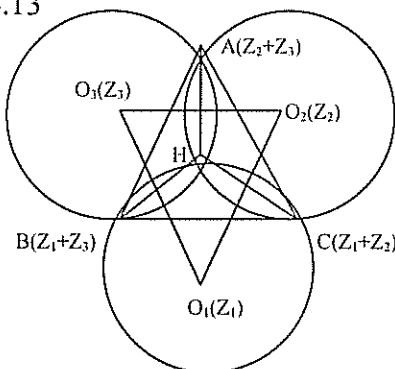
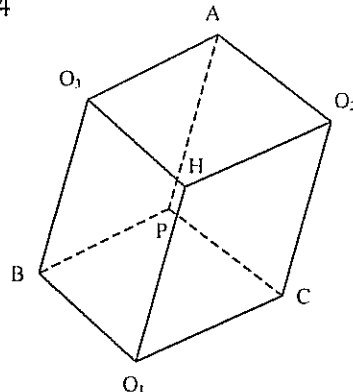


Figura 4.14



Demonstrația 4 (G. Polya).

Fie trei cercuri congruente care trec prin punctul H și care se mai intersectează două câte două în punctele A, B, C (Figura 4.14).

Se consideră separat hexagonul $AO_3BO_1CO_2$ format din romburile AO_3HO_2 , BO_1HO_3 , CO_2HO_1 . Aceasta reprezintă desenul spațial al unui cub în care nu se vede vârful din spate P , ce are proprietatea $PA=PB=PC=R$. Deci prin punctele A, B, C trece un cerc de rază R .

Observație.

Se consideră cele trei cercuri congruente care trec prin punctul H și care se mai intersectează două câte două în punctele A, B, C .

Se notează $\{A_1\}=HA \cap O_2O_3$, $\{B_1\}=HB \cap O_1O_3$ și $\{C_1\}=HC \cap O_1O_2$. Este ușor de văzut că $[A_1B_1]$ este linie mijlocie atât în triunghiul HAB cât și în triunghiul $O_1O_2O_3$. Rezultă $A_1A_2 \parallel O_1O_2$, $A_1B_1 \parallel AB$, ceea ce implică $AB \parallel O_1O_2$. În plus, din faptul că $HC \perp O_1O_2$, se obține $HC \perp AB$. Analog se arată că $HA \perp BC$. Prin urmare H este ortocentrul triunghiului ABC .

Demonstrația 5 (N. Dinescu).

Se folosesc notațiile din figura 4.15. Este evident că cercul circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$ este $\mathcal{C}(H, R)$. Mijloacele A_1, B_1 și C_1 ale laturilor triunghiului $O_1O_2O_3$ determină cercul lui Euler $\mathcal{C}(\omega, R/2)$ al triunghiului $O_1O_2O_3$. Dar A_1, B_1, C_1 sunt și mijloacele lui $(AH), (BH), (CH)$, H ortocentru. Deci cercul Euler al triunghiului ABC este $\mathcal{C}(\omega, R/2)$. Rezultă că cercul circumscris triunghiului ABC are raza R .

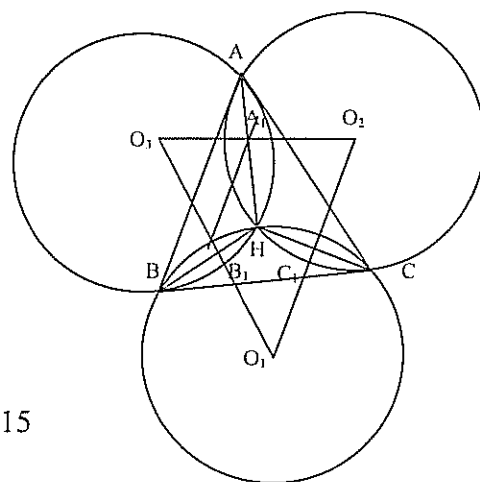


Figura 4.15

4.9 Aplicații

1. Problema piesei de cinci lei

Dacă trei cercuri egale trec toate prin același punct P_0 , atunci cercul care trece prin cele trei puncte P_1, P_2 , și P_3 , în care aceste cercuri se taie două câte două, este egal cu cercurile date

Problema aceasta a fost alcătuită (prin anul 1906) de matematicianul Gheorghe Țițeica, experimental, în timp ce se ajuta de o monedă de 5 lei pentru o trasa niște cercuri. În 1931, autorul a reluat problema, căutând să extindă proprietatea pentru un număr n (natural) oarecare de cercuri, dându-i totodată și denumirea rămasă în uz. La această generalizare și-a adus contribuția (în același an 1931) Dan Barbilian, folosindu-se de teoria spațiilor local-euclidiene și a grupurilor Lie.

Cercul circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$, de centru P_0 (Figura 4.16) este egal cu cercurile date (aceleași raze).

Centrele O_1 și O_2 sunt simetrice față de mijlocul segmentului $[P_0P_3]$ (coarda comună a celor două cercuri egale), deci patrulaterul $O_1P_3O_2P_0$ e romb; analog, patrulaterul $O_2P_1O_3P_0$, $O_3P_2O_1P_0$ sunt rombururi. Rezultă:

$$O_1P_3 = O_3P_1 \quad \text{deci } P_1P_3 = O_1O_3$$

$$O_1P_3 \parallel O_3P_1 \quad P_1P_3 \parallel O_1O_3$$

analog:

$$O_2P_1 = O_1P_2 \quad \text{deci } P_2P_1 = O_2O_1$$

$$O_2P_1 \parallel O_1P_2 \quad P_2P_1 \parallel O_2O_1$$

Și:

$$O_3P_2 = O_2P_3 \quad \text{deci } P_3P_2 = O_3O_2$$

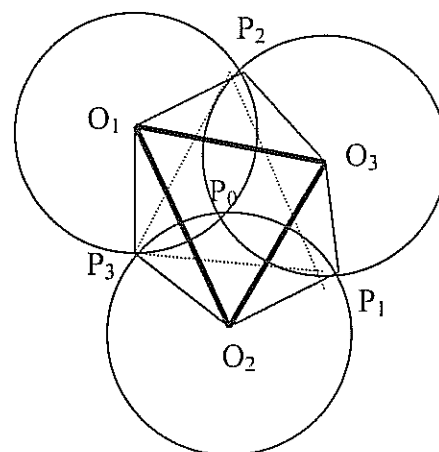


Figura 4.16

$$O_3P_2 \parallel O_2P_3 \quad P_3P_2 \parallel O_3O_2$$

Așadar $\Delta P_1P_2P_3 = \Delta O_1O_2O_3$; în consecință cercul circumscris triunghiului $P_1P_2P_3$ este egal cu cel circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$, deci egal cu cele date.

2. Problema izoperimetrelor

Dintre toate figurile plane care au același perimetru, care este cea care are aria maximă?

Fie $A_1A_2...A_n$ un poligon înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și $B_1B_2...B_m$ un poligon circumscris aceluiași cerc.

Se arată că $\sigma(A_1A_2...A_n) < \pi r^2$ și $\sigma(B_1B_2...B_m) > \pi r^2$. Numărul πr^2 verifică, deci condițiile din definiția unei suprafețe măsurabile și cum lungimea cercului este singurul număr mai mare decât perimetrul oricărui poligon înscris în cerc și mai mic decât perimetrul oricărui poligon circumscris cercului, are loc relația $2x/r = l$, (l = lungimea cercului), deci $x = r l / 2 = r \cdot 2\pi r / 2 = \pi r^2$

3. Cercurile lui Carnot

Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC cu ortocentrul H și cercurile BHC , CHA , AHB . Cercul BHC taie a doua oară laturile AC și AB în A_b și A_c . Fie B_c , B_a și C_a , C_b punctele analoage determinate de cercurile CHA și AHB . Să se demonstreze că H este centrul comun al cercurilor circumscrise triunghiurilor AA_bA_c , BB_cB_a , CC_aC_b .

Observăm că $\sphericalangle HAB = \sphericalangle HCB$ având același complement, unghiul $\sphericalangle B$. Dar $\sphericalangle HCB = \sphericalangle HA_cA$ ca având aceeași măsură în cercul BHC . Rezultă de aici că $\sphericalangle HAB = \sphericalangle HA_cA$; triunghiul HAA_c este deci isoscel și deci $HA = HA_c$. Analog demonstrăm că triunghiul HAA_b este isoscel, deci $HA = HA_b$. Avem deci $HA = HA_b = HA_c$, ceea ce ne arată că H este centrul cercului AA_bA_c . Analog se arată pentru cercurile BB_cB_a și CC_aC_b .

4. Triunghiurile podare DEF și $D'E'F'$ a două puncte izogonale M și M' sunt înscrise pe același cerc.

Într-adevăr, dreptele FE și $F'E'$ sunt antiparalele și deci patrulaterul $FEF'E'$ este inscriptibil; perpendicularele ridicate pe mijloacele coardelor EE' , FF' se taie în mijlocul lui MM' . Același raționament, aplicat la unghiurile $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ va arăta că triunghiurile podare ale punctelor izogonale M și M' sunt situate pe un cerc al cărui centru este mijlocul segmentului MM' .

Vom spune că acest cerc este un cerc podar.

5. Fie A și B două puncte fixe pe un cerc $\mathcal{C}(O, r)$. M fiind un punct variabil pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, să se afle locul geometric al ortocentrului H al triunghiului MAB .

Soluție. Fie A' și B' picioarele înălțimilor din A și B (figura 4.17). Deoarece $m(\sphericalangle MB'H) = m(\sphericalangle MA'H) = 90^\circ$, rezultă că patrulaterul $MA'HB'$ este inscriptibil. Rezultă $m(\sphericalangle AHB) = m(\sphericalangle A'HB') = 180^\circ - m(\sphericalangle AMB) = \text{const.}$ Se va folosi faptul că simetricul ortocentrului unui triunghi față de o latură se află pe cercul circumscris triunghiului. Va rezulta că atunci când M descrie cercul, punctul H va descrie un cerc simetric cercului $\mathcal{C}(O, r)$ față de dreapta AB . Fie O' simetricul punctului O față de dreapta AB . S-a obținut că locul geometric L al punctului H este inclus în cercul $\mathcal{C}(O', r)$.

Perpendiculara în A (respectiv B) pe dreapta AB intersectează cercul $\mathcal{C}(O', r)$ în punctul A_1 (respectiv B_1 (Figura 4.18)).

Se observă că punctul A_1 nu poate fi ortocentrul unui triunghi MAB .

Într-adevăr, dacă $A_1 = H$ este ortocentrul unui triunghi MAB , rezultă că $HM \perp AB$. Deoarece din punctul A_1 se poate duce o singură perpendiculară pe dreapta AB , rezultă că $M = A$ și deci triunghiul MAB nu există. Analog se arată că punctul B_1 nu poate fi ortocentrul unui triunghi MAB . S-a obținut: $L \subset \mathcal{C}(O', r) \setminus \{A_1, B_1\}$ (1)

Se stabilește incluziunea inversă. Fie $H' \in \mathcal{C}(O', r) \setminus \{A_1, B_1\}$. Se notează cu H_1 simetricul lui H' față de dreapta AB . Este evident că $H'_1 \in \mathcal{C}(O, r)$ (Figura 4.19)

Fie $M' \in H'H_1' \cap \mathcal{C}(O', r)$, $M' \neq H_1'$. Deoarece $M'H'$ este înălțime în triunghiul $M'AB$, iar simetricul lui H' se află pe cercul circumscris triunghiului, rezultă că H' este ortocentrul triunghiului $M'AB$, deci s-a obținut

$$\mathcal{C}(O', r) \setminus \{A_1, B_1\} \subset L \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă $L = \mathcal{C}(O', r) \setminus \{A_1, B_1\}$.

Figura 4.17

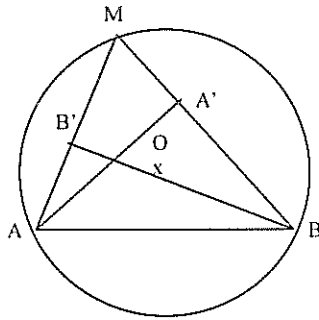


Figura 4.18

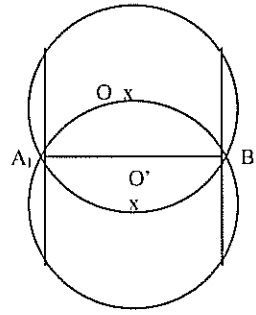
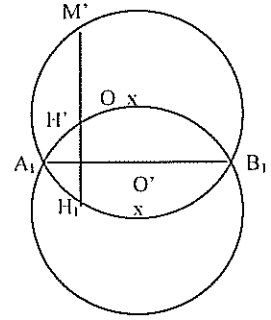


Figura 4.19



6. Două cercuri $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(O', R')$ sunt tangente exterior în punctul A. O dreaptă oarecare trece prin A intersectează din nou cercurile $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(O', R')$ în M și M'. Fie $N \in (O, R)$ și $N' \in (O', R')$, astfel încât $MN \parallel M'N'$. Să se demonstreze că punctele A, N și N' sunt situate pe o aceeași dreaptă.

Soluție (Figura 4.20).

Triunghiurile isoscele OAM și $O'AM'$ sunt asemenea. Rezultă: $R/R' = AM/AM'$. Deoarece $\angle MOA = \angle M'O'A$ rezultă $OM \parallel O'M'$. Din $OM \parallel O'M'$ și $MN \parallel M'N'$ obținem $\angle OMN = \angle O'M'N'$. Din asemănarea triunghiurilor isoscele OMN și $O'M'N'$ rezultă $R/R' = MN/M'N'$.

Triunghiurile AMN și $A'M'N'$ sunt asemenea deoarece $AM/AM' = MN/M'N'$ și $\angle AMN = \angle A'M'N'$.

Rezultă $\angle MAN = \angle M'AN'$ și deoarece $\angle OAM = \angle O'AM'$ se obțin $\angle OAN = \angle O'AN'$ adică punctele N, A, N' sunt coliniare.

7. Fie A și B două puncte fixe pe un cerc $\mathcal{C}(O; r)$. M fiind un punct variabil pe cercul $\mathcal{C}(O; r)$, să se afle locul geometric al centrului de greutate G al triunghiului MAB.

Rezolvare . Se notează cu E mijlocul segmentului [AB] și fie $O_1 \in (OE)$ astfel încât $EO_1 = \frac{1}{3} EO$.

Atunci (Figura 4.21) $EG/EM = O_1G/OM = \frac{1}{3}$.

Rezultă $O_1G = \frac{1}{3} r = \text{constant}$. Deoarece punctul O_1 este fix, rezultă că locul geometric L al punctului G este inclus în cercul $\mathcal{C}(O_1; \frac{1}{3} r)$. Este evident că dacă $M=A$ sau $M=B$, atunci triunghiul MAB nu există. Fie $\{C, D\} = \mathcal{C}(O_1; \frac{1}{3} r) \cap AB$. Se obține:

$$L \subset \mathcal{C}(O_1; \frac{1}{3} r) \setminus \{C, D\} \quad (1)$$

Se va stabili acum incluziunea inversă. Fie $G_1 \in \mathcal{C}(O_1; \frac{1}{3} r) \setminus \{C, D\}$.

Se va arăta că există un triunghi M_1AB , astfel încât G_1 este centrul său de greutate (Figura 4.22). Se unește O_1 cu G_1 : se deduce $OM_1 \parallel O_1G_1$, $M_1 \in \mathcal{C}(O; r)$, atunci $EO_1/EO = O_1G_1/OM_1 = \frac{1}{3}$ și $\angle G_1O_1E = \angle M_1OE$. Rezultă $\triangle O_1G_1E \sim \triangle OM_1E$. aceasta implică $\angle M_1EO = \angle G_1EO_1$, deci

$G_1 \in EM_1$ și $EG_1/EM_1 = \frac{1}{3}$. Prin urmare G_1 este centrul de greutate al triunghiului M_1AB . S-a

obținut: $\mathcal{C}(O_1; \frac{1}{3}r) \setminus \{C, D\} \subset L$ (2)

Din (1) și (2) rezultă $L = \mathcal{C}(O_1; \frac{1}{3}r) \setminus \{C, D\}$

Figura 4.21

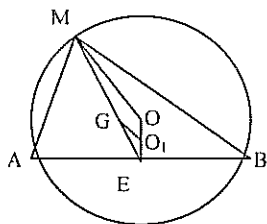
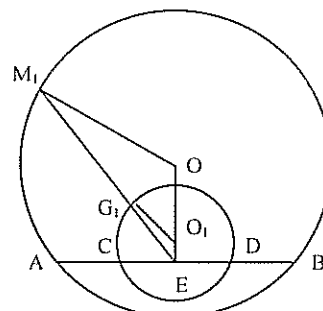


Figura 4.22

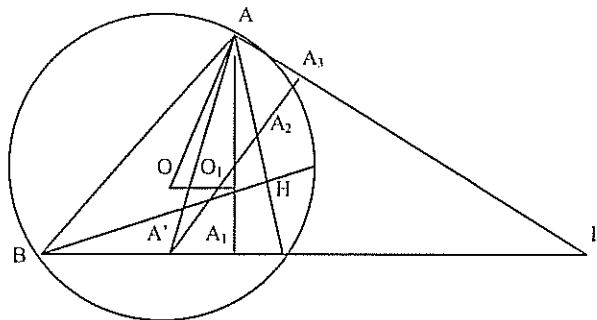


8. Fie A' mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC , L punctul de intersecție a tangentei în A la cercul circumscris triunghiului ABC cu latura $[BC]$. Să se arate că cercul lui Euler al triunghiului $AA'L$ trece prin centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC .

Soluție (Figura 4.23)

Fie A_1 piciorul înălțimii din A pe dreapta BC , A_2 mijlocul segmentului $[AH]$, O_1 centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC ; $[O_1A_2]$ este linie mijlocie în triunghiul AOH , deci $O_1A_2 \parallel OA$. Fie $\{A_3\} = A'A_2 \cap AL$. Rezultă că diametrul $[A'A_3]$ al cercului lui Euler al triunghiului ABC este paralel cu OA , deci este perpendicular pe AL , ceea ce înseamnă că A_2 este ortocentrul triunghiului $AA'L$. Cum $(A'O_1) \equiv (O_1A_2)$, se obține că cercul lui Euler al triunghiului $AA'L$ trece prin O_1 .

Figura 4.23

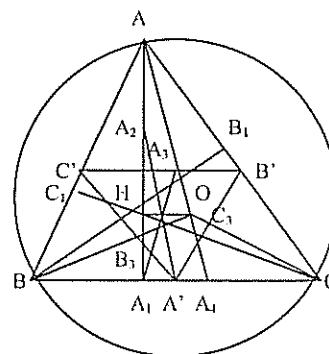


9. În triunghiul ABC înscris în cercul \mathcal{C} , dacă A_1, B, C_1 sunt picioarele înălțimilor pe laturile $[BC], [CA], [AB]$ și A_3, B_3, C_3 punctele unde razele $[OA], [OB], [OC]$, taie laturile $[B'C'], [C'A'], [A'B']$ ale triunghiului median $A'B'C'$, dreptele A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 sunt concurente în centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC .

Soluție (Figura 4.24)

Fie A_2 punctul de intersecție al cercului lui Euler cu înălțimea HA și A_4 punctul unde OA taie latura $[BC]$. Punctul A_3 se află la mijlocul lui $[AA_4]$, deci dreapta A_1A_3 este mediană în triunghiul dreptunghic AA_1A_4 . $[A_2A']$ este diametrul cercului Euler al triunghiului ABC . Rezultă A_1O_1 mediană pentru triunghiul dreptunghic A_2A_1A' . Dar dreapta AA_4 este paralelă cu dreapta A_2A' , deci $A'A_2$ și A_1O_1 se confundă. Astfel A_1A_3

Figura 4.24



trece prin O_1 . Analog se demonstrează că B_1B_3 și C_1C_3 trec prin O_1 .

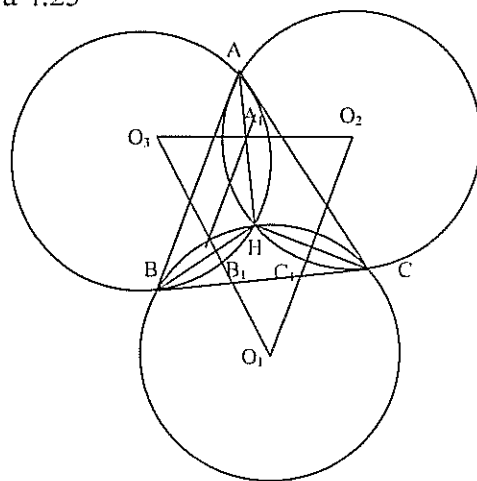
10. Se consideră trei cercuri $\mathcal{C}(O_1;R_1)$, $\mathcal{C}(O_2;R_2)$, $\mathcal{C}(O_3;R_3)$ care au un punct comun H . Luându-le două câte două, se obțin încă trei puncte de intersecție $A \in \mathcal{C}(O_2;R_2) \cap \mathcal{C}(O_3;R_3)$, $B' \in \mathcal{C}(O_1;R_1) \cap \mathcal{C}(O_3;R_3)$ și $C \in \mathcal{C}(O_1;R_1) \cap \mathcal{C}(O_2;R_2)$. Se presupune că $\triangle ABC \sim \triangle O_1O_2O_3$. Atunci $R_1=R_2=R_3$ =raza cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație.

Se folosesc notațiile din figura 4.25. Patrulateralele $O_1B_1HC_1$, $O_2C_1HA_1$, $O_3A_1HB_1$ sunt inscriptibile. Folosind teorema sinusurilor în triunghiurile HA_1B_1 , HB_1C_1 , HC_1A_1 se obține $A_1B_1=R_3\sin O_3$, $B_1C_1=R_1\sin O_1$, $C_1A_1=R_2\sin O_2$, unde cu O_1, O_2, O_3 au fost notate măsurile unghiurilor triunghiului $O_1O_2O_3$ și unde s-a ținut seama de faptul că triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC sunt asemenea, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$.

Din asemănarea triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și $O_1O_2O_3$ rezultă $A_1B_1/O_1O_2 = B_1C_1/O_2O_3 = C_1A_1/O_3O_1$, deci $R_3\sin O_3/O_1O_2 = R_1\sin O_1/O_2O_3 = R_2\sin O_2/O_3O_1$. Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul $O_1O_2O_3$, rezultă $\sin O_3/O_1O_2 = \sin O_1/O_2O_3 = \sin O_2/O_3O_1$, de unde $R_1=R_2=R_3$ și $\triangle ABC \sim \triangle O_1O_2O_3$, deci cercul circumscris triunghiului ABC are raza egală cu $R_1=R_2=R_3$.

Figura 4.25



CAPITOLUL V

PAGINI DIN ISTORIA MATEMATICII

5.1 Geometria elementară

Pe linie de cercetare, geometria cuprinde, astăzi domenii abstracte foarte generale, dar geometria elementară rămâne foarte importantă în învățământ fie prin aplicațiile ei directe diverse, fie ca o verigă în înțelegerea problemelor moderne de teoria spațiilor generalizate, care la rândul lor au aplicații în tehnică și fizica teoretică.

În 1853, când J. Grunert a scris articolul Triunghiul, ca anexă la dicționarul (Wörterbuch) a lui Klügel, numărul teoremelor existente era atât de mare, încât s-ar fi putut ușor alcătui cu ele o carte destul de voluminoasă.

Influența geometriei proiective asupra manualelor elementare s-a modificat curând prin subîmpărțirea riguroasă a acestora, pentru care avem un foarte bun exemplu în Sistemul geometriei elementare (Lehrgebäude der niederen Geometrie, Jena, 1844) al lui Bretschneider. Aceste manuale au cuprins și o parte din materialul geometriei proiective. K. F. A. Jacobi, care a scris și el o interesantă privire de ansamblu asupra teoriei triunghiului (Programm, Pforte, 1825), a introdus în traducerea sa, care merită și astăzi toată atenția, a lucrării Elemente de geometrie (Grundbegriffe der Metakunde, Jena, 1834) a lui van Swinden o mulțime de teoreme ale lui Carnot, Gergonne și Steiner. Patrulaterul complet introdus de Carnot (Geometria de poziție, 1803) și despre care Steiner a enunțat numeroase teoreme (1827) precum și punctele și axele de asemănare, diviziunea armonică, polii și polarele cercului etc. folosite de Monge în „Geometria descriptivă”, au devenit un bun al geometriei elementare.

La teoremele dinainte cunoscute s-au adăugat multe teoreme noi, descoperite de marii creatori ai geometriei proiective. Vom menționa, ca pe un nou domeniu de cercetare, numai problemele elementare de maxim și minim, iar dintre ele, în special, problemele izoperimetrice. L'Huilier (1782 și 1789) le-a consacrat două cărți speciale; Legendre a introdus principalele teoreme și în „Elemente de geometrie”.

Realizări în acest domeniu le datorăm lui Steiner. El a extins așa numita „problemă de închidere” în cazul când poligonul este înlocuit printr-un anumit șir de cercuri și a generalizat-o pentru suprafața sferică și pentru secțiunile plane ale suprafețelor de ordinul al doilea. Au fost aplicate în repetate rânduri transformările prin inversele razelor și proiecția stereografică. Plücker a arătat că și în primul caz se conservă unghiurile. Poncelet a demonstrat în „Tratat” că în locul riglei și al compasului putem folosi numai rigla, dacă este dat în același timp și un cerc fix. Aceleași idei au fost exprimate într-o lucrare specială și de Steiner. Staudt a construit prin această metodă poligonul regulat cu 17 laturi. Hachette (1804) a cercetat geometric generalizarea problemei lui Apoloni despre tangența cercurilor la patru sfere, pe care Fermat o studiasse analitic încă pe la 1640. L. Gaultier a dat, în 1813, soluția completă a problemei lui Apoloni în plan și în spațiu, cu ajutorul noilor noțiuni introduse de el: axă radicală, centru radical și axe de asemănare.

Gergonne a obținut (1816) o soluție asemănătoare. Neumann și Steiner (1826) au înlocuit tangența cercurilor printr-o intersecție sub un unghi drept.

G. Malfatti (1830) a pus o problemă cu totul nouă. Să se afle trei cercuri, astfel ca fiecare

dintre ele să fie tangent la celelalte două și totodată la două laturi ale unui triunghi dat. Malfatti a dat fără demonstrație soluția algebrică. La aceeași problemă au ajuns (1810-1811) Gergonne și J. E. T. Lavernède. Primul care a găsit o construcție adecvată, cu ajutorul trigonometriei, a fost Lehmus (1819-1820).

În 1826, Steiner a publicat, fără demonstrație, o construcție elegantă, care a dat un impuls la numeroase încercări de demonstrație.

Despre triunghi și despre proprietățile sale au mai publicat lucrări speciale Crelle (Berlin, 1816), K. Feuerbach (Nürnberg 1822), L. Schulz von Strasznicki (Viena, 1827), Ch. Nagel (Leipzig, 1836), K. Adams (Wintertur, 1846) și A. Wiegand (Halle, 1848). În aceste lucrări și în articolele publicate paralel cu ele se găsește cea mai mare parte din cea ce se cheamă geometria modernă a triunghiului. De o deosebită celebritate s-a bucurat lucrarea lui Feuerbach, deoarece „cercul lui Feuerbach” a devenit un bun al matematicii elementare. Acest cerc a fost descoperit încă înainte de Poncelet și de Brianchon (1820-1821), precum și de unii matematicieni englezi. Dar Feuerbach a enunțat teorema potrivit căreia el este tangent la cercul înscris în triunghi și la cercurile exînscrise. De asemenea, au devenit celebre „perechile de puncte ale lui Nagel”. Tot aici se încadrează punctul lui E. Grebe, care, de altfel, nu era nou pe atunci și căruia i s-a schimbat numele în cinstea lui E. Lemoine (1873), care a pus bazele noii înfloriri a geometriei triunghiului.

În țara noastră abia la începutul secolului al XIX-lea a început o epocă de pregătire și organizare a învățământului național în general și a celui matematic în special prin școlile de ingineri ale lui Gh. Asachi la Iași. În cel de-al doilea sfert al secolului al XIX-lea încep să apară cărți de matematici în limba română, ca „Aritmetica” lui I. Eliade Rădulescu tipărită în 1832 (traducere după Francoeur); „Algebra” lui Petrache Poenaru; „Geometria” tradusă după Legendre tot de Petrache Poenaru; cărțile de matematici ale lui Gh. Asachi, Alexe Marin, Dimitrie Pavlid.

În cel de-al treilea sfert al secolului al XIX-lea începem să fim consemnați cu lucrări originale românești de matematici (cum au fost lucrările lui Emanoil Bacaloglu și N. Șt. Botez). O dată cu începutul secolului al XX-lea avem epoca de creație matematică propriu-zisă, perioadă în care se formează o școală matematică românească, cunoscută peste hotare. Într-un timp relativ scurt au apărut creatori ca Țițeica, Pompeiu și Lalescu. Pentru epoca în care au trăit și creat, Țițeica a fost un mare geometru, Pompeiu un mare analist, iar Lalescu a excelat în domenii multiple: algebră, analiză, geometrie.

În istoria matematicii în România, Țițeica se înscrie ca un mare geometru român, cunoscut și în afara țării, care a folosit perfect metodele analitice. El este descoperitorul curbelor ce-i poartă numele, al suprafețelor S și cercetător al rețelelor R , cu care a îmbogățit domeniul geometriei.

Dimitrie Pompeiu după obținerea titlului de doctor în matematici, s-a întors în țară unde a fost numit conferențiar, la Universitatea din Iași, apoi profesor titular la catedra de mecanică București, apoi la catedra de geometrie analitică de la școala politehnică din București apoi Cluj. În 1926 Pompeiu a fost angajat, ca și Țițeica la Sorbona unde au predat câte o lună pe an lecții cu subiecte din domeniul lucrărilor sale. Despre el a spus Paul Montel: „il regarde les vieux choses avec des yeux nouveaux”. Aceasta fiindcă Pompeiu se oprea și asupra problemelor de matematici elementare pe care le trata din punct de vedere superior. Caz tipic cu teorema sa : Distanțele de la un punct, la cele trei vârfuri ale unui triunghi echilateral, sunt laturile unui triunghi.

Diversitatea operei matematice a lui Lalescu constituie o caracteristică ce îl distinge esențial de alți cercetători. Traian Lalescu, după doctoratul de la Sorbona, merge la Göttingen unde audiază cursurile lui Hilbert apoi se întoarce în țară și este numit profesor suplinitor la Universitatea din București apoi profesor titular de geometrie analitică la Școala de poduri și șosele.

Traian Lalescu a fost matematicianul român de o forță de concepție, spontaneitate și originalitate rar întâlnite. A fost bine cunoscut și apreciat în străinătate. Prima lucrare de geometrie: „Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie”, realizată în colaborare cu inginerul Ștefan Mitre a rezultat din preocupările sale de la seminarul de geometrie descriptivă. A doua lucrare de geometrie este „Geometria triunghiului”, al cărei manuscris a fost terminat în 1916.

„Geometria triunghiului” constituie o carte de căpătâi pentru cei ce vor să se inițieze în geometria plană. A treia carte de geometrie este intitulată „Tratat de geometrie analitică”.

5.2 Scurt raid în istoria matematicii românești

Școala românească de matematică este astăzi bine cunoscută în lumea întreagă. Mărturie stau numeroasele lucrări ale matematicienilor noștri, care apar atât în revistele de specialitate în limba română cât și peste hotare, în prestigioase reviste internaționale. Istoria dezvoltării matematicii la noi în țară pune însă în evidență faptul că în trecut, activitatea științifică s-a desfășurat în cea mai mare parte datorită entuziasmului și spiritului de sacrificiu de care au dat dovadă marii noștri oameni de știință.

Dacă privim ceva mai departe în timp, constatăm că abia în jurul anilor 1814, odată cu activitatea didactică a lui Gheorghe Asachi(1788-1869) și a lui Gheorghe Lazăr(1779-1823), geometria este predată la noi în limba română. Până atunci, studiul geometriei se făcea în diferite școli particulare în limba latină, greacă sau slavonă, fapt care limita considerabil răspândirea acestor cunoștințe în mase.

Bineînțeles că nu existau manuale sau cărți de geometrie (și în general de matematică) în limba română. Prima lucrare de geometrie în românește a fost traducerea, „Elementelor de geometrie” aparținând cunoscutului matematician și astronom A.M. Legendre (1752-1833) traducere efectuată în 1837 de pedagogul iluminist Petrache Poenaru (1799-1875) a cărui activitate în domeniul organizării învățământului național a fost deosebit de importantă.

Un rol major în dezvoltarea învățământului matematic românesc l-a avut însă Spiru C. Haret (1851-1912) care ca ministru al instrucțiunii publice a luat măsuri în vederea modernizării învățământului din țara noastră.

Prin legea de reformă a acestuia din 1898 se dădea o atenție deosebită geometriei, completându-se studiul acesteia cu elemente moderne.

Haret a sprijinit în măsura posibilităților sale pe tineri matematicieni talentați facilitându-le obținerea unor burse de studiu în Franța țară care în acea perioadă dispunea de o pleiadă de eminenți matematicieni și de institute de învățământ superior de bună calitate.

Anul 1895 se înscrie în istoria culturală a țării noastre ca un an cu o deosebită semnificație, un grup de pasionați ai matematicii, și anume inginerii Vasile Cristescu, Ion Ionescu, A.G. Ioachimescu precum și matematicianul Gheorghe Țițeica, înființează o revistă de matematici elementare „Gazeta matematică” revistă ce avea să devină o adevărată școală pentru generații întregi de iubitori ai acestei științe. „Gazeta matematică” reușește în scurt timp să-și creeze o faimă și dincolo de hotarele țării datorită seriozității cu care erau abordate diferite aspecte ale învățământului matematic.

Toți marii noștri matematicieni și-au făcut ucenicia în paginile acestei reviste.

Adversitățile diferitelor perioade istorice (primul și cel de-al doilea război mondial, criza economică a anilor 1929-1933), n-au reușit să-și lase amprentă asupra „Gazetei matematice”, tocmai datorită spiritului de sacrificiu al celor ce s-au consacrat bunului mers al vieții acestui adevărat for de cultură.

Geometria triumphiului a ocupat un loc însemnat în tematica „Gazetei matematice”. În anul 1901 se înființează o editură a „Gazetei”, în care au văzut lumina tiparului numeroase culegeri de probleme printre care și cunoscuta Culegere de Probleme de Geometrie a lui Gheorghe Țițeica, piatra de încercare a tuturor tinerilor pasionați de geometrie.

În anul 1909 se înființează „Societatea Gazeta Matematică” care de-a lungul anilor reușește să grupeze oameni de diferite profesii: ingineri, ofițeri, profesori din învățământul mediu sau universitar, care s-au dedicat printre altele răspândirii cunoștințelor matematice în special în rândul tineretului.

Modelul „Gazetei matematice” a fost molipsitor. În diferite colțuri ale țării au început să apară „foi” matematice care se inspirau din modul de organizare și lucru al „Gazetei matematice”. Un loc important printre ele – și de fapt singura care a supraviețuit- prin atingerea nivelului calitativ al „Gazetei” a fost „Revista Matematică din Timișoara” al cărei ctitor a fost Traian Lalescu.

5.3. Contribuțiile matematicienilor români la dezvoltarea geometriei

5.3.1 Traian Lalescu

În istoria matematicii din țara noastră, Traian Lalescu reprezintă un creator de o diversitate rară, un mare animator al generației sale de matematicieni, un om dotat cu mare putere de muncă și inteligență scânteietoare, un profesor înzestrat cu deosebit talent pedagogic. Viața relativ scurtă a lui Lalescu (47 de ani) a fost plină de dragoste pentru matematică așa cum reiese dintr-o scrisoare, adresată profesorului său Ion Ionescu: “să-ți urmezi adevărata chemare pentru știința căreia vrei să-i dedici toate puterile tale de muncă”, a murit cu sufletul neîmpăcat că lasă în urma lui cei doi băieți și două fete singuri a căror mamă murise cu mulți ani înainte. Lalescu a ajuns cunoscut prin teza sa de doctorat “Sur l'équation de Volterra”, iar de circulație mondială matematică a ajuns în 1912 prin lucrarea sa de sinteză “Introduction à la théorie des equations intégrales”, prima lucrare de sinteză de valoare din noul domeniu al ecuațiilor integrale, apărută înainte de lucrarea lui Hilbert cu același subiect.

Traian Lalescu a fost continuu în vibrație, veșnic speculativ, mereu îndreptat spre alte frumuseți nebănuite. Nu s-a fixat într-un anumit domeniu matematic, Lalescu a atacat orice problemă matematică nouă, diversitatea operei matematice a lui Lalescu constituie o caracteristică ce îl distinge esențial de alți cercetători. În creația sa matematică Lalescu a avut totdeauna preocuparea de a da substanța, esența problemei atacate, eliminând totdeauna tot ce poate fi accesoriu.

Traian Lalescu s-a născut la 12/24 iulie 1882 în București, ca fiu al modestului funcționar Traian Lalescu, care pe atunci lucra la Banca Națională a României, și al soției acestuia, Maria. Tatăl lui Lalescu era bănățean din Cornea, mama sa transilvăneancă. Lalescu a avut o soră, Cornelia, și un frate, Tudor. Studiile primare le-a făcut la București, primele două clase gimnaziale la Craiova, iar clasele a III-a și a IV-a la Roman. Clasa a V-a a făcut-o la Liceul internat din Iași. În liceu, ca și în gimnaziu, Lalescu a fost totdeauna premiantul I al clasei și premiantul de onoare al școlii. Chiar din clasa a VI-a a liceului, ajunge corespondent la “Gazeta matematică”.

Profesorul său de mai târziu, inginerul Ion Ionescu, relatează despre Lalescu că “Intrarea lui în rândul corespondenților “Gazetei matematice” nu s-a făcut ca de obicei, în mod timid, lent, progresiv, ci deodată, intens, la maximum posibil. A fost un caz unic de apariție la “Gazeta matematică”, de activitate prodigioasă a unui tânăr licean!”. După terminarea liceului, în toamna anului 1900, Lalescu a dat examen de admitere la Școala de poduri și șosele din București, reușind primul. În anul preparator al școlii, studenții nu aveau întreținere gratuită. Aceasta o obțineau după ce intrau în anul I. Din lipsă de mijloace pentru întreținere, Lalescu a voit la un moment dat să se retragă din anul preparator și să se întoarcă la Iași, la familie, spre a urma acolo matematicile. Atunci profesorul Andrei Ioachimescu i-a asigurat gratuit, masa și casa un an întreg.

După terminarea anului preparator, la intrarea în anul I de studii a reușit de asemenea primul. La această școală a urmat trei ani, până în anul 1903, când se retrage și trece definitiv la Facultatea de științe a Universității din București, secția de matematică, unde are ca profesori pe Gheorghe Țițeica, Spiru Haret, David Emmanuel, Nicolae Coculescu și Andrei Ioachimescu. În timp ce era student a funcționat și ca suplinitor de matematici la Institutul Pompilian.

La 17 iunie 1903 își ia cu calificativul “foarte bine” licența în matematici și obține, reușind primul, o bursă “Vasile Adamachi”, pentru studii la Sorbona. La Paris audiază în special pe Emile Picard, Henri Poincaré și apoi își trece din nou licența în matematici, iar mai târziu, la 28 februarie 1908, își trece doctoratul în matematici, în fața unei comisii prezidate de Emile Picard. La Paris, Lalescu trăia exclusiv în mediul matematic, urmărind conferințe, cursuri și seminarii și studiind în special în Biblioteca națională. Teza de doctorat în matematici a lui Lalescu, publicată în “Jurnal de mathématiques pures et appliquées” din Paris, a avut ca subiect ecuația lui Volterra, Lalescu simplifică și arată că studiul unei asemenea ecuații se reduce la studiul unei ecuații diferențiale liniare de ordin infinit și ajunge să deducă proprietățile ecuațiilor integrale Volterra din proprietățile ecuațiilor diferențiale liniare.

Precizia rezultatelor din teza lui Lalescu a impresionat atât de mult lumea matematică, încât cunoscutul profesor sorbonist și matematician francez Eduard Goursat s-a servit chiar în anul apariției tezei (1908) de rezultatul lui Lalescu, într-un memoriu fundamental. Iar mai târziu Goursat citează teza lui Lalescu, în cursul său de renume mondial, intitulat "Cours d' Analyse mathématique".

După doctoratul de la Sorbona, Lalescu trece în vara și toamna anului 1908 și începutul anului 1909 la Göttingen, unde profesau pe atunci Felix Klein, David Hilbert, Minkovski și Zermelo. De la Göttingen, Lalescu se întoarce în țară, unde funcționează ca profesor de matematici la gimnaziu din Giurgiu până în 1910. A fost numit la 29 ianuarie 1909 și profesor suplinitor de analiză și elemente de mecanică la Facultatea de științe a Universității din București. La 26 iunie 1909 își trece la Universitatea din București examenul de docență, cerut pe atunci pentru cei din învățământul universitar. Ca docent a ținut un curs de ecuații integrale, materie nouă, care deschidea noi orizonturi de cercetări și în care Lalescu a fost un creator.

La 1 aprilie 1910, Lalescu a fost numit conferențiar de algebră superioară la Universitatea din București. De asemenea, din octombrie 1910 și până în 1912 a funcționat ca asistent al profesorului Emil Pangrati la catedra de geometrie descriptivă de la Facultatea de matematică a Universității bucureștene.

La 1 aprilie 1911 Lalescu este numit profesor titular de geometrie analitică la Școala de poduri și șosele, ca succesor al lui Spiru Haret, catedră la care a continuat să predea și după ce această ilustră școală se transformă în Școala politehnică din București; aici a funcționat Lalescu în continuare până la moartea sa.

În 1920, Lalescu convinge Ministerul Lucrărilor Publice să înființeze o Școală politehnică și la Timișoara. Școala se înființează, iar Lalescu este primul director (rector) al acesteia, predând ca titular la catedra de analiză matematică și suplinind și catedra de electricitate, fără însă a-și abandona catedra de geometrie analitică de la Școala politehnică din București, sau algebra superioară și teoria numerelor de la Universitatea din București.

După un an, supra-ocupat cu activitatea didactică de la București, Lalescu renunță definitiv la catedra și rectoratul de la Timișoara. Predă în continuare numai la catedrele de la Politehnica din București și la cele de la Universitatea din București.

În 1927 răcește și contractează o dublă pneumonie. Este grav bolnav toată toamna lui 1927. În ianuarie 1928 pleacă la Nisa, apoi la Paris pentru a se vindeca. Când își dă seama însă că nu mai există șanse de vindecare, se întoarce în țară la 1 iunie 1929. Moartea îl surprinde apoi, la 15 iunie 1929, în plină vigoare a creației științifice când, încă nu împlinise 47 de ani.

După moartea lui Lalescu au rămas patru copii orfani: Nicu, Traian, Mariana și Florica.

În creația matematică a lui Lalescu se disting preocupări privind teoria numerelor și algebra, geometria, calculul vectorial și tensorial, seriile trigonometrice, analiza matematică, mecanica, electricitatea.

În materie de geometrie, Lalescu a început să publice de pe timpul când era licean; la început articole de geometrie pură, apoi de geometrie analitică sau de geometrie descriptivă. S-a ocupat de cercul ortocentroidal, de conice, quadrice, teorema lui Poncelet, dreapta lui Simson, puncte duble ale figurilor asemenea, ortopolul, teorema lui Lemoine, triunghiurile S (numite astfel chiar de Lalescu; ar trebui să le numim triunghiurile Lalescu). În acest domeniu a publicat și trei lucrări didactice, de valoare pedagogică, și anume: Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografice, realizată în colaborare cu inginerul Ștefan N. Mirea, fost profesor la Arhitectură (apărută în "Biblioteca Gazetei matematice", în 1914). Aici Lalescu a scris partea privind geometria descriptivă, iar Mirea partea privind cosmografia. Lucrarea aceasta a lui Lalescu a rezultat din preocupările sale de la seminarul de geometrie descriptivă, unde era asistentul onorific al profesorului Emil A. Pangrati. Partea scrisă de Lalescu a apărut în ediția a II-a în 1935, în publicațiile așa numitului Institut matematic scris.

A doua lucrare de geometrie este Geometria triunghiului, al cărei manuscris a fost terminat în 1916. Lalescu a revizuit mereu acest manuscris. Când s-a întors în țară la

1 iunie 1929 din Franța, unde plecase pentru eventuala vindecare, aducea cu el și acest

manuscris. Manuscrisul trebuia să fie publicat în “Biblioteca Gazetei matematice”. Lalescu a decedat imediat însă, iar manuscrisul său a ajuns la fostul său asistent de la Universitatea N. Răclieș, care l-a publicat în limba franceză (cum îl redactase Lalescu, cu titlul *La Géométrie du Triangle*) și cu mențiunea “ediția a II-a, deși nu se cunoaște să fi existat ediția I.

A treia lucrare didactică de geometrie este intitulată „Tratat de geometrie analitică” și a fost tipărită în patru fascicule: I – Dreaptă și plan; II - Conice; III - Cuadrice; IV- Aplicații geometrice ale calculului infinitezimal. Prima fasciculă a apărut în 1920, celelalte între 1922 și 1927.

Lalescu s-a preocupat și de calculul vectorial și tensorial și deși n-a publicat monografia proiectată, în schimb a publicat câteva capitole privind mărimile scalare, vectorii sau tensorii, cum și o introducere despre calculul tensorial (1923).

În problema seriilor trigonometrice Lalescu a scris o serie de memorii în care face o legătură între natura acestor serii și teoria ecuațiilor integrale, studiază funcțiile liniare periodice și introduce pentru prima dată funcțiile poligonale periodice.

Lalescu a ținut frumoase conferințe publice la „Fundatie”, după 1921 despre Teoria relativității restrânse și generalizate a lui Albert Einstein. Preocupat de istoricul matematicilor în țara noastră, Lalescu a tipărit, după cursul făcut de Gheorghe Lazăr la Colegiul Sfântul Sava, Trigonometria cea dreaptă a acestuia și a scris și o serie de articole din domeniul istoriei învățământului matematic românesc.

Cel de-al treilea inițiator necontestat al școlii matematice române și-a preumblat imaginația creatoare matematică, cu aceeași dezinvoltură, în toate domeniile matematice. Este tot atât de perfect algebrist, geometru, analist și chiar fizico-matematician. Nici un matematician român din primii 30 de ani ai secolului al XX-lea n-a fost preocupat mai mult ca Lalescu de a pune matematicile pure în slujba matematicilor aplicate.

În toate domeniile atacate, Lalescu ne-a lăsat perle matematice.

Diversitatea operei matematice – matematică pură și matematică aplicată – îl caracterizează net pe Lalescu.

5.3.2 Simion Stoilov

Simion Stoilov s-a născut la București pe 2 septembrie 1887 a fost doctor în matematici la Sorbona. Profesor la Universitatea din Cernăuți, la Politehnica din București și în continuare, la Universitatea din București. A condus timp de 13 ani Institutul de matematică din București chiar de la înființarea acestuia în anul 1949, a fost rector al Universității bucureștene, ambasador al României în Franța. A fost membru de onoare al Societății matematice a Belgiei; de asemenea, a fost membru în comitetul de redacție al revistei “Compositio mathematic” din Amsterdam.

Cercetările de înaltă valoare științifică ale lui Simion Stoilov privesc teoria ecuațiilor liniare cu derivate parțiale, teoria mulțimilor unde a stabilit și o teoremă care îi poartă numele, teoria topologică a funcțiilor analitice și teoria funcțiilor de o variabilă complexă - aici introducând noțiunea de transformare și echivalentul topologic al funcțiilor analitice, a formulat cel dintâi noțiunea de spațiu de acoperire a unui spațiu topologic și a definit noi clase de suprafețe riemanniene: suprafețele Iversen-Stoilov și suprafețele normal exhaustibile (începând cu 1938).

A elaborat lucrări referitoare la istoria și filozofia matematicii, la relațiile ei cu celelalte domenii ale culturii. În decembrie 1955 profesorul și matematicianul român Simion Stoilov, fiind la Paris, a invitat pe bătrânul său dascăl Jacques Hadamard și pe Arnaud Denjoy ca să participe din partea matematicienilor francezi la al IV-lea Congres al matematicienilor români, care s-a ținut pe urmă la București între 27 mai și 4 iunie 1956.

În momentul invitației, Hadamard avea 90 de ani trecuți, iar Denjoy 71 de ani. Denjoy a răspuns puțin pesimist: “Sa văd dacă voi trăi până atunci: particip dacă îmi permite sănătatea”. Hadamard însă a răspuns categoric și voios:” La Congresul de la București vin, vin sigur!”. Și într-adevăr, Hadamard a participat(a luat parte de altfel și Denjoy) și a fost una dintre surprizele plăcute ale Congresului matematicienilor români. Ce poate fi mai înălțător decât să vezi pe un om de 91 ani că prezidează la ședințe comune de comunicări, că participă la discuții matematice și pune întrebări

tulburătoare sau ia cuvântul (fără să citească), în numele Franței eterne și glorioasei matematici franceze.

Simion Stoilov, fiu al colonelului Stoilov, ofițer sârb refugiat în țara noastră, ajuns general în armata lui Alexandru Ioan Cuza. Studiile universitare le-a făcut la Paris, la Universitatea Sorbona, unde i-a avut ca profesori pe Emile Picard, Henri Lebesgue, Emile Borel, Edouard Goursat, Jacques Hadamard. Licența și-a luat-o în 1910 cu o lucrare asupra structurii funcțiilor analitice și aplicarea acestora în rezolvarea problemelor la limită pentru ecuații cu derivate parțiale.

Lucrarea de doctorat a fost susținută tot în Franța, și, așa cum a recunoscut chiar Simion Stoilov, perioada studiilor pariziene a avut o influență reală și adâncă asupra formării și evoluției gândirii sale științifice. Reîntors în țară, participă la campaniile din Dobrogea și din Moldova, în primul război mondial.

A fost profesor, din 1919 până în 1921, la Facultatea de Științe a Universității din Iași, unde își trece examenul de docență. Conferențiar pe probleme de analiză matematică la Facultatea de Științe a Universității din București este numit la data de 12 decembrie 1921, iar la 1 aprilie 1923 este numit profesor titular de teoria funcțiilor și algebră superioară la Universitatea din Cernăuți, unde a îndeplinit în două rânduri și funcția de decan al Facultății de Științe.

De la Cernăuți trece, în 1939, profesor de analiză la Politehnica din București, iar în 1941, ajunge la catedra de teoria funcțiilor a Universității din București, unde a activat până la sfârșitul vieții, în 1961 mai 4. A susținut în țară și peste hotare numeroase conferințe științifice. În colaborare cu fizicianul român Alexandru Proca, Simion Stoilov și – a scos un memoriu rezumativ al conferințelor sale în 1932 cu titlul ”Proprietățile topologice ale funcțiilor analitice de o variabilă”.

Ca o recunoaștere a meritelor sale științifice a esteticii creației sale, lui Simion Stoilov i s-a decernat Premiul de Stat în anul 1958. De altfel datorită profunzimii teoretice a operei sale și a spiritului său enciclopedic Simion Stoilov a fost comparat cu marele matematician David Hilbert, profesor al Universității din Göttingen.

5.3.3 Gheorghe Țițeica

S-a născut la Turnu Severin 4/16 octombrie 1873 ca fiu al lui Radu Țițeica și al soției acestuia Stanca. Gheorghe Țițeica n-a avut frați; a avut însă trei surori. Înainte de 7 ani a urmat la o grădiniță germană de copii, unde începuse să învețe nemțește. Școala primară și liceul l-a urmat la Craiova (1885-1892), unde a fost bursier și intern. La Craiova a avut ca profesor de matematici pe G. P. Constantinescu, tatăl cunoscutului om de știință român Gogu (George) Constantinescu, creatorul teoriei sonicității, mare inventator în acest domeniu.

Încă din liceu Țițeica a manifestat aptitudini pentru matematici !. Era premiantul I al clasei, excepțional la toate materiile predate, dar se remarcă în special la matematici. Pentru acest motiv avea casa și masa asigurate ca intern, iar începând cu clasa a II-a a obținut și bursa ”Eufrosin Poteca”. În vacanțele de vară pe care și le petrecea la Turnu Severin medita la liceeni, ajutându-și părinții cu banii obținuți.

La terminarea liceului, la examenul de bacalaureat dat la 1 septembrie 1892, a excelat și a atras atenția examinerilor. În 1892 a dat examen de intrare în cunoscuta Școală normală superioară de la București condusă de literatul Alexandru Odobescu. A urmat la Universitatea din București, la Facultatea de Științe, secția de matematici, având ca profesori pe Spiru Haret, David Emmanuel, Constantin Gogu, Dimitrie Petrescu și generalul Iacob Lahovary.

Trei ani după intrarea în universitate, în iunie 1895, își ia licența în matematici, iar în noiembrie același an, Țițeica este numit profesor suplinitor de matematici la seminarul Nifon. În 1896 se prezintă la examenul de capacitate pentru profesorii de matematici din învățământul secundar, obținând post la Liceul Vasile Alecsandri din Galați. Aici însă n-a profestat, deoarece la începutul toamnei, în 1896, pleacă la Paris, fără bursă, numai cu salariul ce-i revenea de la catedra din Galați.

La Paris Țițeica rămâne trei ani, luându-și din nou licența în matematici, în iunie 1897 (reușind primul dintre toți licențiații francezi și străini), își prepară apoi teza de doctorat în

matematici, pe care o susține la 3 iunie 1899.

Despre viața din Școala normală superioară din Paris și cum s-a comportat aici Țițeica, matematicianul francez Henri Lebesgue a scris un articol intitulat Gheorghe Țițeica și Școala normală superioară. În revista "Natura" din 1940 se găsește un articol al matematicianului francez Poul Montel, intitulat Țițeica și Franța, în care se remarcă simpatiile învățatului nostru pentru această țară, unde și-a făcut studiile sale strălucite și a publicat majoritatea memoriilor și lucrărilor de strictă specialitate.

Titlul tezei de doctorat în matematici este „Sur le congruences cycliques et sur les systhèmes triplement conjuguées”. Subiectul este inspirat din lucrările profesorului său Darboux asupra sistemelor de coordonate curbilinii din spațiu cu trei dimensiuni formând un sistem triplu conjugat. La vârsta de 27 de ani, a fost numit profesor la catedra de geometrie analitică și trigonometrie sferică, la care fusese titular profesorul său Constantin Gogu.

Lecțiile lui Țițeica, atât cele de la universitate, cât și cele extrauniversitare, în scopul formării gustului auditorilor pentru știință, al obținerii încrederii publicului pentru opera de creație științifică românească, erau magistrale. La 15 mai 1913, la vârsta de 40 de ani, Gheorghe Țițeica a fost ales membru titular al Academiei Române, în 1922 este numit vicepreședinte al secției științifice a academiei, în 1928 vicepreședinte al academiei; în 1929 a ajuns și secretar general al acestei instituții, având o contribuție importantă în organizarea și administrarea academiei.

Datorită lucrărilor sale de geometrie diferențială publicate în diferite periodice de matematici, Țițeica ajunsese cu timpul atât de cunoscut în lumea matematică mondială, încât, la congresele internaționale de matematici de la Toronto (Canada) din 1924, la cel de la Zürich din 1932 și la cel de la Oslo din 1936 a fost ales președinte al secției de geometrie, cinstea cea mai mare pe care o putea aduce țării învățatul nostru matematician. Între 1919 și 1923 a fost decan al Facultății de științe de la Universitatea din București, iar după 1920 președinte al comisiei române din Institutul internațional de cooperare intelectuală la Societatea Națiunilor (Geneva).

În trei rânduri (1925, 1930 și 1937) a ținut lecții ca agreat la Facultatea de științe din Paris, la Sorbona. În 1930 este ales membru corespondent al Academiei de Științe din Liège (1934), membru la Societas Scientiarum Varsoviensis (1933), iar în 1934 este proclamat Doctor honoris causa al Universității din Varșovia.

Despre conferințele ținute la Sorbona ca profesor agreat, matematicienii Paul Montel și Arnaud Denjoy au menționat, la primul Congres al matematicienilor români ținut la Turnu Severin în 1929, că: „Universitatea franceză se simte foarte onorată că numără printre profesorii săi, pe savanții români, Țițeica și Pompeiu”.

Gheorghe Țițeica a fost în multe rânduri președintele „Societății matematice din România”, președinte al „Societății române de științe”, președinte al „Asociației române pentru înaintarea și răspândirea științelor”, vicepreședinte al „Societății politehnice din România” (1931-1939) și mult timp membru în Consiliul superior al Instrucțiunii Publice (numit în 1905).

După 1919 Țițeica a contribuit mult la organizarea Universității române din Cluj. Din 1927, în afară de profesor la Universitatea din București, Țițeica trece profesor la Școala politehnică din București, pentru analiza matematică, funcționând la ambele științe până la moartea sa, care a survenit la 5 februarie 1939, după o boală care-l ținuse la pat din noiembrie 1938.

Țițeica a dat învățământului universitar românesc și trei copii, toți trei profesori universitari: Radu (născut în 1905), Gabriela (născută în 1907) și Șerban (născut în 1908).

În geometria diferențială proiectivă și afină Țițeica este creator de drumuri noi. Este chiar considerat și de matematicienii străini ca un precursor în domeniul geometriei diferențiale afine. După studiul suprafețelor S , suprafețelor Țițeica, marele nostru matematician a ajuns la descoperirea curbelor care-i poartă numele, curbelor Țițeica. În ultimii ani ai vieții Țițeica se preocupa în special de geometria curbelor. În memoriul „Mouvements à un paramètre d'un solide”, Țițeica studiază geometria mișcărilor cu un parametru pentru un solid.

O parte importantă din activitatea lui Țițeica a fost îndreptată în direcția cultivării interesului pentru științele matematice. A lucrat la „Gazeta matematică” timp de un an, până în 1896 când a plecat la Paris, spre s-și trece doctoratul în matematici. După anul 1899, Țițeica a devenit unul

dintre redactorii importanți ai gazetei, preocupându-se în special de probleme de geometrie pură și geometrie analitică. În „Gazeta matematică” Țițeica a publicat 34 de articole, 18 note și a propus 121 de probleme. De asemenea, în „Biblioteca Gazetei matematice” a publicat: Culegere de probleme de Aritmetică, Geometrie și Trigonometrie, Culegere de probleme de Mecanică și Geometrie analitică, Vocabular matematic, volumul IX ; Culegere de probleme de Geometrie, volumul X, Culegere de probleme de Geometrie analitică, partea I ; II . În afară de 96 de memorii, opera științifică a lui Țițeica cuprinde două volume de mare valoare, unul intitulat „Géométrie différentielle projective des réseaux”, celălalt intitulat „Introduction à la Géométrie différentielle projective des courbes” publicat în 1931.

În istoria matematicii în România, Țițeica se înscrie ca un mare geometru român, cunoscut și în afara țării, care a mânuit perfect metodele analitice. El este descoperitorul curbilor ce-i poartă numele, al suprafețelor S arătate că sunt sfere afine și cercetător al rețelelor R , cu care a îmbogățit domeniul geometriei.

5.3.4 Dimitrie Pompeiu

Matematician român născut la Dimăcheni-Dorohoi 22 septembrie 1875. După ce a obținut diploma de institutor (în care calitate a și profesat câțiva ani), și-a făcut studiile universitare la Sorbona, unde a luat doctoratul pe baza unei teze care a stârnit senzație și admirație în lumea matematică. A fost profesor la Universitatea din Iași, apoi la Universitatea din București și, un anumit timp, la Politehnica bucureșteană. A fost membru al Academiei Române; Universitatea din Varșovia i-a conferit titlul de doctor honoris causa. A luat parte activă la mișcarea democratică pentru pace, a fost director al Institutului Român pentru relațiile culturale cu străinătatea.

Activitatea sa științifică s-a desfășurat în domeniul teoriei funcțiilor și al calculului funcțional, unde, printre cei dintâi, a aplicat teoria modernă a mulțimilor - introducând în 1905 funcțiile ce-i poartă numele, descoperind în 1912 importanta noțiune de derivată areolară. De asemenea, a adus contribuții la calculul diferențial și integral, în geometria sintetică; a fost preocupat de fundamentele mecanicii, făcând cercetări asupra principiului lui D'Alembert.

Pe lângă numeroasele memorii originale publicate în revistele de specialitate din țară și în mai toate țările unde cultura matematică a fost mai dezvoltată, Dimitrie Pompeiu a fost și al unor manuale școlare. Are multe memorii privind fundamentele mecanicii, sau probleme frumoase de geometrie. Teorema sa de geometrie elementară: „distanțele de la un punct la cele trei vârfuri ale unui triunghi echilateral sunt laturile unui triunghi” a dat prilej mai târziu lui Dan Barbilian să scrie un memoriu. Și tot Pompeiu a enunțat primul că trapezul, care are baza mare de trei mai mare ca baza mică, are vârfurile sale pe o parabolă.

În toată creația matematică a lui Pompeiu, chiar când avem de-a face cu prezentări axiomatice, se observă simplitate și aleasă ordine artistică.

Dimitrie Pompeiu, creatorul funcțiilor care poartă în prezent numele său, creator al instrumentului de cercetare numit derivata areolară, cu contribuții importante în teorema creșterilor finite, în domeniul ecuațiilor funcționale și în cel privind fundamentele mecanicii, este un mare analist român de reputație mondială, analist înzestrat cu o intuiție de geometru.

5.3.5 Dan Barbilian

S-a născut la Câmpulung - Muscel pe 12 august 1961; matematician și poet român. A studiat la Facultatea de Științe din București, la Göttingen, Tübingen și Berlin; a obținut doctoratul în matematică la Universitatea din București, unde a și profesat tot timpul vieții sale. A fost membru al „Deutsche Mathematische Vereinigung”.

S-a afirmat prin valoroase cercetări privind fundarea axiomatică a geometriei; a publicat lucrări din domeniul algebrei și teoriei numerelor, remarcabile prin originalitatea lor. Din studiile asupra metrizării anumitor mulțimi, au apărut începând cu 1934 noțiunea de semnătură (care înlocuiește pentru grupurile transfinite pe aceea de ordin) și noțiunea de Δ -derivată în 1950. A avut

preocupări de axiomatizare a mecanicii clasice; este matematicianul care a adus o prețioasă contribuție geometriei elementare.

Dintre geometrii români Dan Barbilian, mergând pe drumul programului de la Erlangen al lui Felix Klein, a trecut după 1933 la fundarea grupal-teoretică a geometriei; și pornind de la studiul lui Hilbert (Bazele geometriei), s-a ocupat de fundamentarea axiomatică a acestei discipline. Dan Barbilian, inspirat de lucrările și cursurile lui Emmanuel, a redactat teza de doctorat în matematici intitulată: Reprezentarea canonică a adunării funcțiilor ipereliptice, în care, utilizând teorema restului din teoria seriilor liniare, pe o curbă algebrică de gen 2, obține teorema de închidere a lui Otto Staude, pentru elipsoizii omofocali, precum și teorema lui Felix Klein, pentru suprafața lui Kummer, generalizând aceste două teoreme. De altfel, Dan Barbilian, în: "La périodicité des opérations commutatives" precum și în "Axiomatische Begründung der Abelschen Theorems in Grossen", se ocupă tot de geometrie algebrică, referindu-se la teorema lui Abel din teoria funcțiilor abeliene și axiomatizarea în teoria varietăților abeliene folosind o tratare algebrică.

Ocupându-se de structurile metrizate, Barbilian a generalizat condițiile pentru identificarea într-o structură o submulțimii care să fie un spațiu distanțat; a dat cu această ocazie o generalizare a teoremei de extremum a lui Dedekind asupra lanțurilor principale în structurile modulare. Barbilian s-a ocupat și de teorema finitudinii a lui Hilbert ("Endlichkeitssatz") pentru o caracteristică nenulă, stabilind că numai invariantii de pondere inferioară unei anumite margini se exprimă rațional prin baza liniară finită de toți invariantii; orice formație de pondere superioară acestei margini sau banal nulă, sau reprezintă o syzigie (reuniune). Generalizând conceptul de nilpotență, Barbilian a studiat grupurile fără torsiune ale lui A. I. Malțev și a ajuns să construiască radicalul periodic ca o generalizare a nilpotenței, în care ipoteza normalizatorului nu mai este verificată în mod necesar.

Între anii 1945 și 1952, Barbilian s-a ocupat intens de critica teoremei Jordan-Hölder; a publicat memorii privind normalitatea unitară și teorema lui Dedekind pentru normalitatea β și γ ; a modificat unele trăsături ale normalității lui Uskov și a demonstrat, prin inducție transfinită, lema lui Zassenhaus. Barbilian a arătat că cele două tehnici (Kuros-Zassenhaus și Schreier) corespund la două concepții diferite. El a precizat că pentru anumite normalități, aparținând lanțurilor bine ordonate, teorema rafinării nu poate fi stabilită decât după schema originară a lui Schreier, dacă lema lui Zassenhaus nu mai este dată aprioric.

În teoria lui Galois se știe că teorema lui Lagrange asupra rezolventelor este o teoremă fără reciprocă; Barbilian a demonstrat această reciprocă, folosind noțiunea de adjuncție critică introdusă de Artin.

Tot Barbilian a supus unui studiu critic aprofundat prima teoremă a lui Galois pe care, abstractizând-o, o consideră valabilă pentru extensiuni necomutative. Generalizând noțiunea de derivată grupală, introducând noțiunea de Δ – derivată ordinară sau Δ -derivată. El are de asemenea un memoriu, un memoriu care privește teoria generală a conexiunilor galoisiene, tratând despre soluția exhaustivă a problemei lui Steintz. Wolfgang Krull, șeful școlii germane de algebră modernă, dându-și seama de importanța descoperirii lui Barbilian, a scris articolul: "Über einen neuen Normalitätsbegriff" în care folosește memoriul lui Barbilian, accentuând asupra noțiuni de corp normal dată de Barbilian. Un ultim memoriu al lui Barbilian, publicat postum, privește rezolvarea abstractă prin radicali și fixează în detaliu noțiunea de radical și noțiunea de derivată grupală.

Stimând și admirând pe poet, să înțelegem mândria și mai mare încă a lui Barbilian pentru ceea ce a făcut în matematică. Opera sa matematică s-a înscris deja în edificiul viu al matematicii, este durabilă și fără a avea pretenția la popularitatea dobândită în celălalt gen în care Barbilian s-a exprimat, ne inspiră, un adânc sentiment pentru unul dintre cei mai mari matematicieni pe care i-am avut.

5.3.6 Ion Ionescu

Ion Ionescu s-a născut la 22 noiembrie 1870 în cătunul Stoienoaia, comuna Creta-Leșile, Ilfov și a decedat la 17 septembrie 1946, în București. Așa cum scrie singur în testamentul publicat în „Gazeta matematică”, clasa I primară a făcut-o la școala din cătunul Petrăchioaia și parțial la școala primară din Cărbunești; clasele a II-a; a III-a; a IV-a le-a urmat la Școala primară numărul 1 de Roșu din București. După cursul primar a intrat la o școală comercială din București, unde prin concurs a obținut o bursă. La vârsta de 19 ani a dat concurs de admitere în anul preparator al Școlii naționale de poduri și șosele unde a reușit cu distincție. În această școală a făcut studii strălucite. În Gazeta matematică, Ion Ionescu a propus 626 de probleme dintre care 276 de aritmetică și teoria numerelor, 96 de algebră, 156 de geometrie, 33 de trigonometrie, 11 de geometrie analitică etc.

Din toate numerele „Gazetei matematice” care au apărut lunar timp de 47 de ani (în număr de 568) numai în 19 numere nu apare nici o problemă propusă de Ion Ionescu. În afară de activitatea desfășurată la Gazeta matematică Ion Ionescu s-a dedicat și școlii de învățământ superior. A fost profesor la Școala națională de poduri și șosele din București, transformată în 1920 în Școală politehnică. A fost membru corespondent al Academiei Române; de asemenea, membru ales la Mathematical Society (Anglia).

Ion Ionescu a publicat numeroase articole de istoria matematicii române sau mondiale și istoria învățământului matematic românesc. S-a ocupat în special de primele lucrări didactice de matematici apărute le noi între 1777 și al patrulea sfert de secolul XIX-lea. Alături de Petre Sergescu, Ion Ionescu stă în fruntea pușinilor cercetători ce-i avem în acest domeniu matematic.

5.4 Euler și geometria

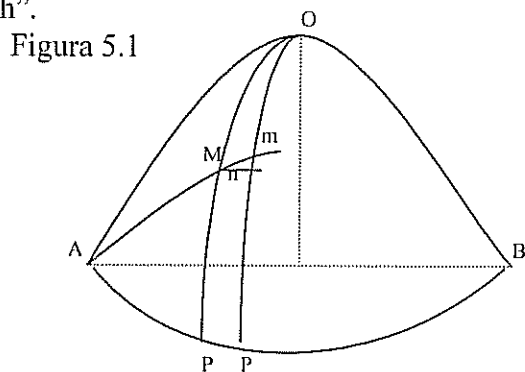
Licențiat, Leonard Euler (Basel, 15.04.1707 – Petersburg, 18.09.1783), matematician, mecanician, astronom și fizician elvețian.

A studiat la Universitatea din Basel. A dorit să obțină un post la universitatea pe care a urmat-o, dar refuzul oficialităților l-a făcut să accepte în 1727 invitația de a merge în Rusia, să lucreze la Academia de Științe din Petersburg. La 26 ani a devenit membru al acestei academii. Situația precară ce domnea în Rusia, îl determină pe Euler să primească în 1741 invitația lui Frederic al II-lea de a veni ca profesor la Academia de Științe din Berlin, unde și-a continuat prodigioasa sa activitate timp de 25 ani, după care revine, ca director, la Academia de Științe din Petersburg la stăruința Elisabetei a II-a (1729-1796); aici va rămâne până la sfârșitul vieții.

Viața lui L. Euler – aureolată cu distincții și binemeritate onoruri, dar și umbrite de cumplite nenorociri – constituie un exemplu minunat de muncă dedicată științei și progresului omenirii. A fost ales membru a 8 academii, s-a bucurat de stima multor personalități. P. Laplace în considera „învățăcelul nostru al tuturor”, C. Gauss spunea: „studiul lucrărilor lui Euler constituie cea mai bună școală pentru cele mai variate domenii ale matematicii”, iar F. Araga afirma că „Euler calculează așa cum oamenii respiră și vulturii planează în văzduh”.

Într-adevăr, L. Euler a scris (în afara celor peste 2800 de scrisori, importante prin informațiile științifice și istorice) aproximativ 1200 de memorii – operele sale cuprinzând 80 de volume mari – fiind primul în lume ca productivitate științifică. Vedem astfel că aprecierea lui M. Fuss că „Euler s-a angajat să furnizeze Academiei din Petersburg atâtea memorii încât să publice în analele ei și 20 ani după moartea sa” a fost de mult depășită după

cum a remarcat, F. Rodio că, a dat mai mult decât a promis, căci lucrările sale au ornamentat memoriile. Academia de la Petersburg a publicat lucrărilor lui Euler până în 1823, la 40 de ani după moartea lui. Când apoi, în 1843, la 60 de ani după moartea lui Euler, s-a făcut o revizuire a



lucrărilor sale, spre a se face catalogarea giganticei moșteniri științifice lăsate de el, s-au mai descoperit „încă 50 de memorii științifice despre a căror existență nici nu se știa”. Din cauza muncii excesive, la 28 de ani, Euler a suferit o congestie cerebrală, pierzându-și ochiul drept; „voi avea mai puține distracții” a spus și a continuat să muncească cu aceeași pasiune. La vârsta de 59 de ani și-a pierdut cu desăvârșire vederea, însă orbirea nu l-a împiedicat să-și continue rodnică activitate, dictând rezultate cercetărilor sale unui fiu, Albrecht. L. Euler putea lucra oricum și oriunde, avea darul de a calcula mintal, fără a comite greșeli, nici la calcule lungi. Era un matematician de o aleasă cultură: cunoștea istoria popoarelor, recita în întregime Eneida lui Virgiliu.

În domeniul matematicii, aceeași varietate, zeci de teoreme, formule și noțiuni poartă numele său; a adus contribuții de valoare în toate ramurile matematicii, în algebră – definirea logaritmului unui număr prim prin considerarea operației inverse de ridicare la putere, introducerea ecuațiilor reciproce, studierea (timp de 17 ani neîntrerupt) a problemei rezolvabilității prin radicali a ecuațiilor algebrice de grad mai mare decât patru, crearea teoriei fracțiilor continue, introducerea notațiilor e , i , $f(x)$ s.a.; în geometrie dreaptă, cercul care îi poartă numele; redescoperirea formulei privind numărul fețelor, vârfurilor și muchiilor unui poliedru convex; în trigonometrie, pe care o tratează analitic (nefiind precedat de altcineva); în teoria numerelor – legea reciprocității cuantice, funcția $\phi(n)$; în analiza matematică – dezvoltări în serie, metode pentru integrarea anumitor tipuri de integrale remarcabile, considerarea variabilelor complexe și a funcțiilor de variabilă complexă, a pus bazele calculului variațional; în teoria ecuațiilor diferențiale -introducând noțiunile de soluție generală și particulară, a adus contribuții în geometria diferențială – exprimarea suprafețelor prin ecuații parametrice, a stabilit formula Euler relativă la curbura normală a unei curbe la o suprafață.

În lucrarea “Introducere în analiză”, vol. II a lui Euler, menține în întregime concepția carteziană a coordonatelor; transformările de coordonate erau folosite de toți matematicienii și luau adesea forme foarte complicate, deoarece atunci se trecea frecvent de la un sistem oblic la altul, cu altă origine și cu un alt unghi între axe, fără a se folosi funcțiile trigonometrice. Acestea au fost folosite pentru prima dată în acest scop de către Euler. El mai nota sinusul și cosinusul unui unghi cu o literă specială. Dar întâlnim la ele și formule de transformare a unui sistem rectangular, ca:

$$t = x \cos q - y \sin q, u = x \sin q + y \cos q.$$

În capitolul II din “Introducere în analiză”, consacrat transformării coordonatelor, Euler se ocupa pe scurt de problema dreptei. Inițial el dă ecuația ei sub forma $\alpha u + \beta t + b = 0$, dar apoi, dorind să determine poziția dreptei, o scrie sub forma $\alpha x + \beta y - a = 0$

În capitolul V din volumul II al “Introducerii în analiză” este vorba despre proprietățile generale ale tuturor conicelor, adică despre proprietățile care se pot deduce din ecuația generală de ordinul doi. Deși la început Euler afirma în mod categoric că nu se pot deduce dintr-un singur principiu toate proprietățile conicelor și că unele rezultă din modul generării lor pe con, iar altele prin procedee de descriere, aici el vrea însă să se bazeze numai pe ecuație. Aceasta se scrie sub forma:

$$yy + \frac{(\epsilon x + \gamma)y}{\xi} + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\xi} = 0$$

Deducând proprietățile obișnuite ale diametrelor, secantelor și tangentelor. Printre consecințele care le deduce găsim și teorema potrivit căreia o conică poate fi considerată ca loc geometric cu patru drepte. Mai departe el determină ecuația diametrului care împarte în două părți egale coardele, care sunt paralele cu ordonatele, întâi într-un sistem rectangular, iar apoi, pentru aceeași conică, într-un sistem în care axa absciselor și originea rămân neschimbate, dar ordonatele sunt oblice. Punctul de intersecție al celor două diametre dă centrul conice ale cărei coordonate nu depind de unghiul format de direcția ordonatelor cu axa absciselor. Apoi Euler stabilește ecuațiile raportate la “diametrii conjugați”:

$$yy = \alpha + \beta x + \gamma xx \text{ și } yy = \alpha - \beta xx.$$

Urmează apoi lucrări cu totul noi și originale. Anume plecând de la această din urmă ecuație (el nu desenează aici decât elipse), Euler determină prin calcul o altă pereche de diametrii conjugați, pentru unul dintre aceștia fiind dat unghiul format cu axa absciselor. Euler calculează tangenta

unghiului celui de al-doilea diametru cu axa absciselor, tangenta unghiului dintre cei doi diametri conjugați noi, și la sfârșit lungimile lor. Euler utilizează atât litere speciale, cât și simbolurile moderne pentru notarea funcțiilor de unghiuri cunoscute. În Apendice despre suprafețe, anexat la acest volum, Euler transformă efectiv ecuația $aacc=\alpha uu+\beta tu+\gamma tt$ într-un sistem de coordonate rectangular, raportând-o la axele principale. Geometria analitică a conicelor era pusă pentru prima dată pe propriile picioare.

În volumul II al “Introducerii în analiză” Euler a adăugat o destul de amplă Anexă despre suprafețe. El începe prin a declara că ne putem face o idee asupra unei suprafețe după distanțele punctelor ei la un plan luat arbitrar. În acest plan, ia apoi “axa” cu “originea a absciselor” și introduce astfel un sistem rectangular de coordonate. Euler arată că trebuie să dăm lui x, y, z , toate variabilele pozitive și negative posibile, relevă posibilitatea de a schimba între ele coordonatele și planele formate de axele lor, discută foarte amănunțit problema simetriei coordonatelor în cei opt octanți. Mai departe, Euler arată că o ecuație cu două coordonate reprezintă o suprafață cilindrică, iar o ecuație omogenă exprimă un con (sau o piramidă). De aceea, el prezintă o clasă foarte generală de suprafețe cuprinzând conuri, cilindri și suprafețe de rotație, apoi o altă clasă de suprafețe, ale căror secțiuni perpendiculare pe axă sunt triunghiuri, după aceea clasă de suprafețe ale căror secțiuni paralele sunt afine între ele și încă două tipuri de suprafețe riglate. Urmează apoi un capitol special în care sunt deduse ecuațiile care transformă un sistem rectangular de coordonate în spațiu într-un alt sistem. Deoarece Euler introduce șase mărimi care definesc transformarea, formulele sale nu sunt simetrice. Euler introduce noțiunea de “ordin” al suprafeței și enunță teorema potrivit căreia ordinul curbei plane obținute prin secționarea suprafeței nu este mai mare decât ordinul suprafeței; concomitent ele remarcă și posibilitatea descompunerii (degenerării) liniei de intersecție în alte câteva linii. Ca exemplu, Euler dă ecuația planului $\alpha x+\beta y+\gamma z=a$, pentru care determină, printre altele, unghiurile cu planele de coordonate.

Euler încearcă pentru prima dată să discute ecuația generală de gradul doi cu trei coordonate, și fără a efectua toate calculele corespunzătoare, el arată, pe bază de plauzabilitate, că ecuația generală poate fi adusă la forma: $App+Bqq+Crr+K=0$ (elliptoeides).

Din această ecuație Euler obține un elipsoid, hiperboloidul cu o pânză și cu două („superficies elliptico-parabolica” și „superficies parabolico-hyperbolica”). Paraboloidul eliptic și cel hiperbolic („superficies elliptico-parabolica” și „superficies parabolico-hyperbolico”) sunt exprimate sunt exprimați aici prin ecuația: $App\pm Bqq=ar$.

Euler mai menționează și cilindrul parabolic $App=aq$ și face câteva observații asupra modului cum se poate stabili natura suprafeței pe baza ecuației date.

Raționamentele lui Euler, erau destul de imperfecte, însă clasificarea propusă de el a devenit baza cercetărilor ulterioare.

La începutul Anexei, Euler a declarat că, spre deosebire de Clairaut, el nu intenționează să se ocupe separat de curbele cu curbura dublă deoarece ele sunt strâns legate de natura suprafețelor. De aceea, își încheie Anexa cu un capitol consacrat intersecției a două suprafețe care, în general, este o curbă strămbă. El arată că dacă eliminăm una dintre variabile obținem ecuațiile proiecțiilor acestor curbe pe planul de coordonate, și aplică aceasta la intersecția suprafeței cu un plan. Mai departe, stabilește pentru sfera întâi conul de rotație tangent la ea după un cerc dat, iar apoi conul eliptic tangent la sferă în două puncte. Referitor la intersecție nu are decât două puncte reale, proiecția ei pe un plan de coordonate este reală.

În volumul II din “Introducere în analiza infinitezimală” Euler a rezumat foarte clar și frumos toate cunoștințele obținute în timpul său în acest domeniu, fără a introduce rezultatele mai importante din teoria curbelor. El a dezvoltat teoria asimptotelor rectilinii și curbilinii, fără triunghiul algebric, cercetând numai descompunerea în factori liniari a expresiilor formate din termeni de gradul $n, n-1$, etc. din ecuația curbei. El a împărțit curbele de gradul trei în 16 genuri, în conformitate cu comportarea lor la infinit. Și mai succinte sunt raționamentele sale referitoare la determinarea formei curbei după ecuația ei. Euler se ocupă de problema tangentelor în punctele simple și multiple. Dacă un punct multiplu are coordonatele p, q atunci, în cazul unui punct dublu, el reduce ecuația curbei la forma:

$$P(x-p)^2 + ch(x-p)(y-q) + P(z-q)^2 = 0$$

apoi dă formele corespunzătoare ale ecuațiilor pentru punctul triplu și cvadruplu. Euler definește pentru o curbă parabola care o aproximează în vecinătatea unui punct dat și găsește pentru aceasta din urmă centrul de curbura. Pentru ecuația:

$$0 = At + Bu + Ctt + Dtu + Euu + Ft^3 + Gttu + Htuu + \dots$$

Euler obține că lungimea razei de curbura în originea coordonatelor este:

$$\frac{(A^2 + B^2)\sqrt{A^2 + B^2}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$$

Analizând această expresie, el ajunge la punctele de inflexiune de ordinul întâi și de ordin superior, în care scop mai folosește și termenii de gradul trei. El cercetează în mod analog punctele unghiulare de ordinul întâi și de ordin superior, situate pe origine. Ca formă generală care cuprinde toate aceste posibilități, el ia curbele de aproximare având ecuații de forma: $\alpha x^m = s^n$. În aceste considerații, punctele unghiulare de speța a doua nu apar, bineînțeles, doar cu ajutorul unui exemplu bine ales, Euler demonstrează că astfel de puncte există în mod real.

Următoarele două capitole ale cărții lui Euler se ocupă de curbele sau diametru și de definiția curbelor ale căror ordonate au proprietăți date. Euler consacră un capitol special proprietăților de asemănare și de afinitate ale curbelor. El repetă indicația sa că o ecuație omogenă în raport cu x și cu y reprezintă doar un sistem de drepte concurente. Dacă însă ecuația devine omogenă prin introducerea unui parametru a , atunci toate curbele pe care le reprezintă sunt asemenea. Euler dă ca exemplu ecuația:

$$y^3 - 2x^3 + ayy - aax + 2aay = 0$$

și demonstrează că dacă coordonatele punctelor unui alt sistem de curbe sunt notate cu X și Y , vom avea în totdeauna: $x = X/n$ și $y = Y/n$. Euler definește "afine" curbele ale căror coordonate sunt legate de ecuațiile: $x = X/m$ și $y = Y/n$.

Această definiție coincide cu noțiunea actuală de afinitate.

Este interesant că Euler introduce în cartea sa și un capitol despre curbele transcendente. El se ocupă pe scurt de curbele trigonometrice, de curba logaritmică, de cicloidă, de epicycloidă și de hipocicloid, de curba $x^y = y^x$ și de spirală. Pentru spirale el recurge din nou la coordonate polare, notând cu s unghiul polar, măsurat în radiani, și cu z , ca și înainte, raza vectoare polară.

Îndemnat de Jean Bernoulli, Euler a generalizat problema geodezicelor pentru curbele al căror plan osculator formează cu planul tangent la suprafață un unghi care nu este drept. Euler s-a ocupat de problema geodezicelor în cazul în care ecuația suprafețelor este implicită. Aplicarea operațiilor diferențiale a fost posibilă după apariția a două articole ale lui Euler consacrate curbelor în spațiu. Tot el aplică formule din trigonometria sferică, adăugând însă în "A doua considerație" (Dissertatio altera), pentru cei pe care nu-i satisface acest "principiu străin", o deducție cu totul diferită, care ia ca punct de plecare planul osculator. Tot Euler arată că tangentele la orice curbă strâmbă formează totdeauna o suprafață desfășurabilă și că același lucru este valabil pentru o suprafață formată din tangentele comune la două "corpuri". Astfel a introdus noțiunea de suprafață desfășurabilă, iar puncte sale au fost reprezentate prin doi parametri.

Meritele lui Euler, în transformarea trigonometrie și realizările ei ulterioare

Este clar că un geniu analitic atât de pregnant cum a fost Euler trebuia să realizeze progrese considerabile în trigonometrie. Prilejul de a recurge la trigonometrie i s-a oferit în "Introducere în analiză" (1748) în capitolul VIII din volumul I, Euler introduce pentru prima oară în analiză funcțiile goniometrice ca mărimi numerice, cu care se pot efectua calcule ca și cu orice alte mărimi, astfel încât ele să nu mai exercite apoi influență asupra dimensiunii expresiilor.

Euler s-a ocupat în mod special de trigonometria sferică în două articole mari, abordând-o din punct de vedere diferit. În primul el a construit într-un mod cu totul general trigonometria sferică ca geometrie a triunghiurilor formate pe suprafața sferei din linii de distanță minimă. Euler pleacă de la triunghiul dreptunghic, notând cateta AP cu x , cateta PM cu y , ipotenuza AM cu s . Dacă O este polul cercului mare (ecuatorul) pe care este situat AP , iar OP este meridianul infinit

$$ds = \sqrt{(dy)^2 + (dx \cos)^2}$$

apropiat de OP, atunci $Mm=ds$, $mn=dy$,

$Pp=dx$ și linia Mn, situată pe cercul paralel de latitudine y este egală cu $dx \cos y$.

Mai departe, Euler caută condițiile în care integrala acestui element de arc va avea valoare minimă și obține astfel zece ecuații care rezultă din regula lui Neper. Aici apar pentru prima dată notațiile pe care astăzi la considerăm firești a căror lipsă a dat adesea lucrărilor precedente o formă atât de incomodă. Noile notații i-au permis lui Euler să-și scrie cele zece ecuații într-o formă cu totul modernă. El a obținut apoi din ele șase ecuații fundamentale distincte pentru triunghiul dreptunghic. Euler a procedat într-un mod similar și pentru triunghiul sferic oarecare. După ce a determinat minimul dintre laturi, El a obținut întâi cinci ecuații fundamentale, din care a dedus apoi teorema sinusurilor, cele două teoreme ale cosinusului și așa numita regulă a cotangentei. Euler scrie fiecare teoremă în trei forme, care se obțin una din alta prin permutare ciclică. Aplicațiile și transformările teoremelor fundamentale figurează în număr foarte mare. El a dedus teorema sinusurilor, teorema cosinusului pentru laturi și o formulă nouă, care leagă între ele cinci elemente:

$$\cos A \sin c = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$$

relevând că aceste trei formule conțin întreaga trigonometrie sferică.

5.5 Notițe bibliografice selective din viața și opera matematicienilor renumiți

5.5.1 Apoloniu din Perga

Al treilea și ultimul mare matematician din perioada elenistică, alături de Euclid și Arhimede, a fost Apoloniu din Perga (Perga oraș în Asia Mică). El a trăit în special în Alexandria, unde a învățat la succesorii lui Euclid. Anul nașterii lui Apoloniu se stabilește la aproximativ 262, anul morții-aproximativ 200 î.e.n. El a vizitat marele centru al culturii grecești din acea vreme - orașul Pergam din nord-vestul Asiei Mici, unde l-a cunoscut pe Eudemos din Pergam, căruia l-a consacrat primele două cărți din a doua ediție a lucrării sale fundamentale în opt volume Secțiuni conice (Conica).

Secțiuni conice. Primele patru cărți din această lucrare au ajuns până la noi în limba greacă, următoarele trei în traducere arabă, iar ultima este pierdută. Abordarea de către Apoloniu a secțiunilor conice diferă de metodele tuturor predecesorilor săi. În timp ce până la Apoloniu fiecare dintre cele trei tipuri de secțiuni se obține dintr-o formă particulară a conurilor circulare drepte, el obține toate cele trei tipuri ale secțiunilor din orice con circular drept, sau oblic. Stabilind legătura dintre problema „aplicării ariilor” și secțiunile conice, Apoloniu spre deosebire de predecesorii săi, care denumeau aceste curbe secțiuni ale conurilor ascuțite, dreptunghic și obtuz, le-a dat denumirile elipsă, parabolă și hiperbolă - denumiri ce au intrat pentru totdeauna în știință.

Prima carte a secțiunilor conice începe cu definiția conului circular, în general înclinat, conul fiind considerat de ambele părți ale vârfului său. Tot aici se introduc noțiunile fundamentale ale teoriei secțiunilor conice, diametrele sale, diametrele conjugate și axe. Apoloniu obține elipsa, parabola sau hiperbola, după cum planul taie toate generatoarele numai ale unei pânze a conului, este paralel cu o generatoare sau taie ambele pânze ale conului. Pentru fiecare dintre aceste curbe, Apoloniu stabilește proprietatea ei fundamentală, folosind coordonate oblice; drept axe de coordonate sunt alese un diametru arbitrar PP' și coarda conjugată cu aceasta QQ' ; originea coordonatelor P se află pe curbă. Dacă vom folosi notația algebrică modernă, aceste proprietăți se

vor exprima sub forma: $y^2 = 2px \pm \frac{p}{a} \cdot x^2$, unde semnul minus corespunde elipsei, iar semnul plus

hiperbolei; în cazul parabolei termenul al doilea din membrul drept este egal cu zero; p reprezintă parametrul curbei. Avem $y = QV$, $x = PV$, $2a = PL$. Se înțelege că Apoloniu exprimă proprietățile acestor curbe cu ajutorul algebrei geometrice.

Astfel, deși Apoloniu nu a descoperit această proprietate fundamentală a secțiunilor conice ce a fost cunoscută încă lui Menechmus, Euclid și Arhimede, el a exprimat-o printr-un procedeu general, echivalent cu ecuația prin care sunt definite în geometria analitică secțiunile conice, dacă sunt raportate la coordonate oblice.

(aceasta legată de legile consonanței muzicale); au descoperit iraționalitatea - utilizând așa numita teoremă a lui Pitagora (despre care unii istorici ai matematicii antice - Plutarh (c.50-120), Iamblic (c. 250-325), Proclus (412-485) - au transmis legenda că Pitagora, ca mulțumire pentru izbânda stabilirii acestei teoreme, a adus jertfă zeilor o sută de bivoli); pitagorenii le era cunoscută existența celor cinci poliedre regulate.

Era de asemenea cunoscută suma unghiurilor unui triunghi, construcția pentagonului și a decagonului regulat înscris în cerc, folosind împărțirea razei în raport mediu. În școala lui Pitagora erau exprimate prin rapoarte numerice simple lungimile coardelor care dau notele muzicale. Astfel, folosind aceeași greutate dar variind lungimea coardei era cunoscut că raportul 2 corespunde octavei, $3/2$ cvintei, $4/3$ cuartei. În jurul acestor rezultate s-a făcut multă teorie în școala lui Pitagora și chiar dacă partea filozofică rezultată nu convenea tuturor, este de remarcat un fapt deosebit și anume că acustica n-a mai făcut progrese după Pitagora timp de 2000 de ani.

În astronomie, ideea că Pământul se află în mișcare, în jurul unui „foc central” apare, pentru prima dată în istoria gândirii umane, în cadrul școlii pitagorene; tot ei au admis pluralitatea lumilor, că viteza corpurilor cerești depinde de distanța la care se află de centrul orbitei lor.

Pitagora nu a lăsat nimic scris, de aceea este greu să i se delimiteze concepțiile și contribuțiile științifice și filozofice de ale discipolilor săi, mai ales că prima descriere asupra operei și școlii sale a fost întocmită cu peste 13 decenii mai târziu, anume de către Filolaus (în anul 370 î.e.n.).

5.5.3 Torricelli Evangelista

Modigliani, 15.10.1608-Firenze, 25.10.1647, matematician și fizician italian.

A studiat la colegiul iezuiților din orașul natal; stabilindu-se în Florența, ca discipol al lui G. Galilei (1564-1642), a fost numit filozof și matematician al ducelui de Toscana.

Luând ca punct de plecare teoria căderii corpurilor creată de dascălul său Galilei, Torricelli a descoperit o metodă de determinare a tangentelor, analoagă celei a lui Roberval (1602-1675) și concomitentă, rezultat publicat în „Opera geometrica” în 1644.

Pe la 1640, el a obținut prima rectificare a unei curbe, determinând segmentul egal cu lungimea arcului de spirală logaritmică măsurat de la pol. Era considerat expert în mânuirea indivizibililor în studiul curbilor.

S-a ocupat de studiul strofoidei și este coautor cu Descartes (1596-1650) la descoperirea spiralei logaritmice pe care a rectificat-o. În 1644, s-a ocupat de curba logaritmică stabilind că subtangenta ei este constantă. A introdus cicloidele alungite și scurte. Lui i se atribuie și următoarea teoremă frumoasă de geometrie; dacă pe laturile unui triunghi ABC construim triunghiuri echilaterale BCI, CAJ și ABK atunci:

- 1) cercurile circumscrise celor trei triunghiuri echilaterale au un punct comun T;
- 2) laturile triunghiului ABC sunt văzute din T sub unghiuri egale;
- 3) centrele U, V, W ale triunghiurilor echilaterale formează un nou triunghi echilateral;
- 4) dreptele AI, BJ, CK trec prin T;
- 5) segmentele AI, BJ, CK sunt egale;
- 6) T este punctul pentru care suma distanțelor lui la vârfuri este minimă.

Deci; în lucrarea sa monumentală „Opera geometrica” (1644), a expus cercetările matematice: numeroase cuadraturi (începând cu a cicloidei), cubaturi (de exemplu, la solidul hiperbolic), rectificări (prima referitoare la arcul de spirală logaritmică), descoperirea-independent de G. Roberval (1602-1675)-a metodei tangentelor, teorema universală pentru determinarea centrului de greutate al unei figuri geometrice, proprietatea curbei logaritmice de a avea subtangenta constantă, eseuri de trecere la limită etc. redată și în lucrarea „De maximis et minimis” (1640). Expunerea sa remarcabilă prin claritate și precizie a facilitat difuzarea ideilor lui B. Cavalieri (1591-1647) asupra indivizibililor.

În domeniul fizicii, a demonstrat experimental că aerul este greu, inventând (în 1643) instrumentul numit ulterior tubul lui Torricelli - pe care E. Mariotte (în 1676) l-a denumit

barometru; în hidraulică, a stabilit o interesantă formulă privind scurgerea lichidelor printr-un orificiu, iar în mecanică, formula $v=\sqrt{2aS}$ care permite calculul vitezei unui mobil după ce a străbătut cu accelerația a spațiul S - formulă numită prin tradiție "ecuația lui Galilei". În semn de prețuire a meritelor, fizicienii denumesc unitatea de măsură pentru presiunea atmosferică, torr (abreviere a numelui Torricelli).

5.5.4 Joseph Gergonne

Joseph Gergonne (1771-1859) matematician francez; el a redescoperit proprietatea lui Ceva folosind cu totul alte considerații. Gergonne a fost un matematician multilateral, el atacând probleme de geometrie superioară, teoria ecuațiilor, mecanică. În Franța, cea dintâi revistă specializată în matematică a fost „Journal de l'Ecole Polytechnique”, care a fost întemeiată în anul înființării acestei celebre instituții (1795), apare apoi revista condusă de Gergonne „Annales des math. Pures et appliquées” (1810/1831)

J. D. Gergonne s-a ocupat de dezvoltarea teoriei ecuațiilor liniare cu multe necunoscute, în teoria inversiunilor;

Gergonne a expus, în 1826, principiul dualității în toată generalitatea, în plan și în spațiu, indiferent de conica sau cuadricele autoduale. Dualitatea este un exemplu strălucit de izomorfism între două modele diferite, cu aceeași structură. Gergonne a arătat că dacă o suprafață este de gradul n, duala ei este de clasa n. Prin clasa unei curbe plane înțelegem numărul tangentelor pe care putem să I le ducem într-un punct, prin clasa unei suprafețe înțelegem numărul planelor tangente care putem să I le ducem printr-o dreaptă.

Joseph Gergonne a arătat, în 1818, că dacă într-un tetraedru $A_1A_2A_3A_4$ considerăm un punct P și notăm cu P_i intersecțiile dreptelor PA_i cu fețele opuse, avem relația

$$\sum_{i=1}^4 \frac{PP_i}{A_iP_i} = 1 \quad \text{În adevăr, } PP_i/A_iP_i \text{ este raportul volumelor piramidelor } PA_2A_3A_4 \text{ și } A_1A_2A_3A_4 \text{ etc.}$$

În 1823, Gergonne a arătat că într-un triunghi echilateral, suma pătratelor distanțelor unui punct al cercului înscris la laturi este constantă.

În adevăr, luând ca axe coordonate o latură și înălțimea corespunzătoare, ecuațiile normale ale laturilor sunt: $y=0$, $\frac{1}{2}(x\sqrt{3} + y - a\sqrt{3})^2=0$, $\frac{1}{2}(-x\sqrt{3} + y - a\sqrt{3})^2=0$.

Locul geometric al punctelor pentru care suma pătratelor distanțelor lor la laturi este constantă, are ecuația:

$$y^2 + 1/2(x\sqrt{3} + y - a\sqrt{3})^2 + 1/4(x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3})^2 = l^2, \quad x^2 + y^2 - \frac{2a\sqrt{3}}{3}y + a^2 - 2/3l^2 = 0,$$

deci un cerc cu centrul în centrul de simetrie al triunghiului. Acest cerc este chiar cercul înscris dacă

$$\text{are raza } a\sqrt{3}/3, \text{ când } l = a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Gergonne a dat, în 1826, următoarea generalizare a teoremei Pascal, pentru curbele plane de grad superior. Dacă $p(p+q)$ din cele $(p+q)^2$ puncte de intersecție a două curbe de grad $p+q$ sunt situate pe o curbă de gradul p, atunci cele $q(p+q)$ puncte rămase sunt pe o curbă de grad q.

Teorema Pascal corespunde pentru $p=2$, $q=1$, curbele de grad 3 fiind formate din laturile 1, 3, 5 respectiv 2, 4, 6 ale hexagonului înscris.

Gergonne a arătat, în 1826, că locul centrelor cuadricele tangente la șapte plane, este un plan.

În adevăr, fie o rețea de cuadrice

$F(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z) = 0$, planul polar al unui punct $M(x_0, y_0, z_0)$ în raport cu cuadricele rețelei $p(x, y, z) + \lambda q(x, y, z) + \mu r(x, y, z) = 0$ unde p, q, r sunt formele lineare dedublate ale polinoamelor de gradul al doilea f, g, h; aceste plane, depinzând linear de doi parametri trec printr-un punct fix.

Dual, polii unui plan fix, în raport cu cuadricele unei rețele tangențiale de cuadrice, sunt

situate într-un plan. Cuadricele unei rețele sunt tangente la șapte plane fixe. Când planul π este la infinit, polul lui este centrul cuadrice mobile din rețea și rezultă teoreme enunțată.

5.5.5 Henri Brocard

Henri Brocard, matematician francez născut în 1845 are contribuții interesante în geometria modernă a triunghiului, introducând “punctul Brocard” și “cercul Brocard”. Este autor al lucrărilor “Analyse indéterminée du premier degré” (1896), “Notes de bibliographie des courbes géométriques” (1897) și “Courbes géométriques remarquables” (1922)”. El a reluat teorema lui Crelle și a demonstrat în 1877 teorema referitoare la cercul Brocard. Moartea lui Brocard rămâne încă o enigmă pentru istorici.

La un moment dat, Brocard a dispărut: se presupune că ar fi murit atât de sărac, încât a trebuit înmormântat în groapa comună a vreunui cimitir din Paris, pierzându-i-se astfel urma. Se pare că ultima lucrare publicată de Brocard este aceea privitoare la viața lui Gaspard Monge, 1746-1818, în revista „L’intermédiaire des Mathématiciens”

5.5.6 Emil Lemoine

Emile Lemoine (1840-1912) matematician francez care a activat în administrația Parisului. Participant la fondarea Societății franceze de matematică și fizică. A fost co-fondator și editor al revistei “L’intermédiaire des Mathématiciens” (1894). Fondator al publicației “La Trompette”. Cercetările și publicațiile privesc în principal geometria triunghiului, construcțiile trigonometrice și calculul probabilităților.

Și-a consacrat o mare parte a activității sale „noii înfloriri a geometriei triunghiului”.

Punctul de concurență al simedianelor era cunoscut încă din 1847, dar el a primit numele lui Lemoine datorită în special proprietăților simedianelor, investigate cu deosebire de acesta. Emile Lemoine a scos în evidență, în 1873, două cercuri legate de punctul K de concurență al simedianelor: paralelele duse prin K la laturi le taie în puncte situate pe un cerc; antiparalelele duse prin K la laturi determină al doilea cerc.

5.5.7 Simone L’Huillier

Matematician elvețian. Profesor la Geneva și membru al lui Royal Society. Preocupări de analiză și geometrie. S-a remarcat în anul 1784 când a câștigat premiul instituit de Secția de fizică și matematică a Academiei din Berlin condusă atunci de Lagrange, pe tema unei teorii clare și precise a infinitului mare și a infinitului mic în matematică.

L’Huillier a dezvoltat consecvent calculul infinitezimal pe baza reprezentărilor exacte asupra limitei date de englezul B. Robins. Lucrarea a apărut în 1786 la Berlin sub titlul “Expunere elementară a principiilor calculelor superioare”.

A cercetat în 1782 condiția ca un tetraedru să fie ortocentric, arătând că pentru realizarea acestui lucru este suficient ca două perechi de muchii opuse să fie perpendiculare.

Simone L’Huillier a dat în 1789 remarcabila expresie a excesului sferic

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varepsilon}{4} = \operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2} \quad \text{și formula duală. Avem, în adevăr, din definiția excesului}$$

sferic $\varepsilon = A + B + C - \pi$; înlocuim în relațiile Delambre

$$\frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{a}{2}}, \quad \frac{\cos \frac{B+C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\cos \frac{b+c}{2}}{\cos \frac{a}{2}} \text{ pe } \frac{B+C}{2} \text{ prin } \frac{\pi}{2} - \frac{A-\varepsilon}{2}.$$

Aplicând proprietățile rapoartelor, scriem

$$\frac{\cos \frac{A-\varepsilon}{2} - \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{A-\varepsilon}{2} + \cos \frac{A}{2}} = \frac{\cos \frac{b-c}{2} - \cos \frac{a}{2}}{\cos \frac{b-c}{2} + \cos \frac{a}{2}},$$

$$\frac{\sin \frac{A-\varepsilon}{2} - \sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A-\varepsilon}{2} + \sin \frac{A}{2}} = \frac{\cos \frac{b+c}{2} - \cos \frac{a}{2}}{\cos \frac{b+c}{2} + \cos \frac{a}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} \operatorname{tg} \left(\frac{A}{4} - \frac{\varepsilon}{4} \right) = \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} \operatorname{ctg} \left(\frac{A}{4} - \frac{\varepsilon}{4} \right) = \operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2}$$

Înmulțind, rezultă formula L'Huilier. Menționăm că avem și relațiile

$\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} = \sin \frac{p}{2} \sin \frac{p-a}{2} \sin \frac{p-b}{2} \sin \frac{p-c}{2}$ și analoagă, obținută înlocuind toate sinusurile prin cosinusuri, prin împărțirea cărora obținem formula L'Huilier.

Dual, $\varepsilon \rightarrow 2(\pi-p)$, $p \rightarrow \pi - \frac{\varepsilon}{2}$ și formula L'Huilier devine

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{p}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tg} \frac{2A-\varepsilon}{4} \operatorname{tg} \frac{2B-\varepsilon}{4} \operatorname{tg} \frac{2C-\varepsilon}{4}$$

L'Huilier a dovedit în 1809, că, simetricele medianelor unui triunghi față de bisectoarele triunghiului sunt concurente. Aceste drepte, numite simediane, au fost subiectul a numeroase cercetări în secolul următor.

5.5.8 Lazare Carnot

Inginer, matematician, mecanician și om politic francez, militar de carieră, născut la Noly. Preocupări și rezultate în algebră, geometrie, trigonometrie și mecanică.

Bazându-se pe teorema proiecțiilor a construit întreaga trigonometrie plană. În lucrarea "Geometria de poziție" (1803) a dat indicații pentru interpretarea soluțiilor negative ale ecuațiilor algebrice. În mecanica sistemelor a introdus noțiunile de legătură și de mișcare geometrică, obținând rezultate interesante și originale.

Lazare Carnot a introdus noțiunea de patrulater complet. Carnot a încercat să scrie, sub o formă unică, diverse relații de geometrie, al căror aspect se modifică, odată cu poziția elementelor. De exemplu, a dat, în 1801, teorema: dacă o dreaptă face unghiurile $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Cu laturile a, b, c, \dots ale unui poligon plan, atunci avem relația, între unghiurile orientate formate $a \cdot \cos \alpha + b \cdot \cos \beta + c \cdot \cos \gamma + \dots = 0$ pe care a extins-o în spațiu.

În același gen de preocupări, Carnot a extins, în 1803, teorema Menelau pentru poligoane plane, în spațiu, și pentru conice.

El a arătat că dacă un plan taie un poligon strâmb $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ în punctele $M_1 M_2 M_3 \dots M_n$, avem relația

$$\frac{M_1 A_1}{M_1 A_2} \cdot \frac{M_2 A_2}{M_2 A_3} \dots \frac{M_n A_n}{M_n A_1} = 1. \quad (3)$$

Dacă o conică taie laturile unui triunghi ABC în punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ avem relația $\frac{A_1 B}{A_1 C} \cdot \frac{A_2 B}{A_2 C} \cdot \frac{B_1 C}{B_1 A} \cdot \frac{B_2 C}{B_2 A} \cdot \frac{C_1 A}{C_1 B} \cdot \frac{C_2 A}{C_2 B} = 1$ (4)

În adevăr, pentru relația (3), fie $\pi = ax + by + cz + d = 0$ ecuația planului și π_i rezultatul înlocuirii în prima parte a ecuației prin coordonatele x_i, y_i, z_i ale punctului M_i . Avem

$$\frac{M_1 A_1}{M_1 A_2} = \frac{\pi_1}{\pi_2}, \frac{M_2 A_2}{M_2 A_3} = \frac{\pi_2}{\pi_3}, \dots \text{De asemenea, fie } \gamma = f(x, y) = 0 \text{ ecuația conice și } \gamma_1 \text{ rezultatul înlocuirii}$$

coordonatelor vârfului A în ecuația conice; latura BC taie conica în punctele A_1, A_2 ; punctele M coliniare cu B, C au coordonatele de forma $\frac{x_2 + r x_3}{1+r}, \frac{y_2 + r y_3}{1+r}, r = \frac{MB}{MC}$

Dacă M este situat și pe conică, coordonatele lui verifică ecuația $f(x, y) = 0$ adică

$f(x_2, y_2) + r \varphi(x_2, y_2, x_3, y_3) + r^2 f(x_3, y_3) = 0$; coeficientul lui r nu ne interesează, deoarece pentru rădăcinile ecuației avem: $r_1 r_2 = \frac{A_1 B}{A_1 C} \cdot \frac{A_2 B}{A_2 C} = \frac{f(x_2, y_2)}{f(x_3, y_3)} = \frac{\gamma_2}{\gamma_3}$, cu care verificăm relația (4)

Carnot a arătat în 1801, că dacă H este ortocentrul unui triunghi ABC , cercurile ABC , BHC , CHA , AHB sunt egale și fiecare dintre punctele A, B, C, H este ortocentrul triunghiului format de celelalte trei.

O_1, O_2, O_3 sunt simetricile centrului cercului circumscris O al triunghiului ABC față de laturi, în triunghiul $O_1 O_2 O_3$, punctul O este ortocentru și H centrul cercului circumscris.

În adevăr, fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor. Dreapta $O_2 O_3$ este paralelă cu linia mijlocie $B_1 C_1$ deci cu BC și OO_1 este înălțime în triunghiul $O_1 O_2 O_3$. Atunci $AH = 2 OA_1 = OO_1$ deci $HO_1 = AO = \text{constant}$ și H este centrul cercului $O_1 O_2 O_3$.

Rezultă că triunghiurile $ABC, O_1 O_2 O_3$ au același cerc al celor nouă puncte. Această teoremă a fost enunțată în ultimii ani ai vieții lui Carnot.

Carnot a arătat că suma distanțelor ortocentrului unui triunghi la laturi este egală cu suma razelor cercului circumscris și înscris.

În adevăr, pe figura alăturată

$$OA_1 = OB \cos \frac{BOC}{2} = R \cos A, \text{ iar } \cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$\text{Relația de demonstrat este echivalentă cu } r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Carnot a arătat în 1803, ca o generalizare a teoremei Pitagora $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, cum calculăm aria a , a feței unui tetraedru în funcție de ariile b, c, d ale celorlalte fețe, unghiurile diedre α, β, γ ale fețelor care pleacă din vârful opus feței a ,

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2bc \cos \alpha - 2cd \cos \beta - 2bd \cos \gamma$$

Într-adevăr, proiectăm vârful A în A' pe fața BCD ; avem relația dintre arii $(BCU) = d \cos(\alpha b) + c \cos(\alpha c) + d \cos(\alpha d)$, Înmulțim cu a și scădem cele trei relații analoge, pentru b, c, d .

Carnot a observat, în 1803, proprietatea de concurență a coardelor comune a trei secante, luate câte două.

Tot în 1803, Carnot a arătat că dacă circumscriem o conică unui triunghi, tangentele în vârfuri taie laturile opuse în puncte coliniare.

5.5.9 Karl Feuerbach

Matematician german profesor de matematică la Erlangen.

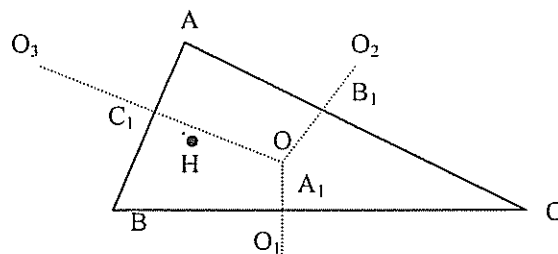
Karl Feuerbach este autorul uneia dintre cele mai frumoase teoreme de geometrie elementară. El a arătat, în 1822, că cercul înscris și cercurile exînscrise unui triunghi sunt tangente aceluiași cerc, anume cercului celor nouă puncte. Teorema numită Feuerbach, și punctele de contact, punctele Feuerbach, au fost subiectul a numeroase cercetări. Feuerbach a arătat, în 1822, că triunghiul ortic al unui triunghi este triunghiul înscris de perimetru minim. Feuerbach este autorul, din 1822, a relațiilor care au devenit clasice, între elementele unui triunghi.

$$S = r_a(p-a), \quad r_a + r_b + r_c = r + 4R$$

R, r, r_a, r_b, r_c , fiind razele cercului circumscris, înscris și exînscrise. De asemenea, Feuerbach a dat o relație corespunzătoare relației Euler: $OI_a^2 = R(R + 2r_a)$ corespunzătoare centrului cercului exînscris I_a

Rezultatele sunt sintetizate în lucrarea "Eigenschaften einiger mehrwüerdiger Punkte des Dreiecks", Nürnberg 1822.

Figura 5.3



În 1827, Feuerbach a întreprins un studiu al tetraedrului ortocentric. El a arătat că într-un tetraedru ortocentric, suma pătratelor muchiilor opuse este aceeași și egală cu pătratul distanței mijloacelor muchiilor opuse.

Perpendicularele comune ale perechilor de muchii opuse trec prin ortocentru iar punctele lor de sprijin pe muchii sunt picioarele înălțimilor fețelor tetraedrului.

5.5.10 Ernest Grebe

Ernest Grebe a arătat, în 1847, că simedianele unui triunghi împart laturile opuse în rapoartele pătratelor laturilor adiacente; în consecință, simedianele sunt concurente într-un punct K numit punctul lui Lemoine.

5.5.11 Giovanni Ceva

GIOVANI CEVA precursor necunoscut al unei noi geometrii a triunghiului
Giovanni Ceva a fost un matematician italian care a trăit între anii 1647-1734. Istoria culturii italiene îi păstrează un loc important în perioada de matematicieni ai Renașterii și Evului Mediu târziu.

În anul 1678 el publică la Milano o lucrare intitulată Construcția statică a liniilor drepte concurente (titlul în limba latină era: *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*) în care el insistă în special asupra a ceea ce noi numim astăzi „teorema lui Menelau” (aproximativ secolul II e.n.) demonstrând-o cu ajutorul unor considerente de mecanică și dându-i de asemenea, și o extindere în spațiu.

Ceva credea că teorema este nouă. Acest lucru poate părea azi curios, dar trebuie să facem observația că abia după anul 1700, Edmund Halley (1656-1742) editează în Anglia operele ale unor matematicieni ai antichității printre care Apollonius, Serenus și Menelau.

A descoperit teoreme asupra teoriei transversalelor. Lui îi aparțin primele scrieri matematice clare privind soluționarea matematică a unor probleme economice. Este autor al lucrărilor: „*De lineis rectis se invicem secantibus constructio statica*” (1678), „*Geometriae mutus, De mundi fabrica ...*” și „*De re numeraria geometricae tractata*”.

5.5.12 Menelau

Către sfârșitul secolului I e. n. , a trăit Menelau din Alexandria, autor al lucrării Sferica. Despre alte două lucrări de geometrie ale lui Menelau, Elemente de geometrie și Cartea despre triunghiuri, se știe din izvoare arabe.

Se presupune că în prima dintre ele , printre altele era rezolvată problema duplicării cubului cu ajutorul unei curbe pe care Menelau a numit-o „paradoxală” și despre care Tannery a presupus că era o curbă ce se obține prin intersecția sferei cu un con circular drept, al cărui diametru este egal cu raza sferei și a cărui generatoare trece prin centru sferei.

Lucrarea în trei volume a lui Menelau Sferica ce s-a păstrat în traducere arabă, conține pentru prima dată noțiunea de triunghi sferic

Cartea I este consacrată propozițiilor fundamentale cu privire la triunghiurile sferice, analoage propozițiilor din Elementele lui Euclid, referitoare la triunghiurile plane. În cazul în care la Euclid se întâlnesc propoziții ce nu au un analog deplin în geometria sferică, Menelau le înlocuiește prin propoziții corespunzătoare. Astfel, de exemplu, el demonstrează că suma unghiurilor interne ale unui triunghi sferic este mai mare decât două unghiuri drepte.

Cartea II din Sferica lui Menelau are același conținut ca și cartea III a lucrării lui Teodosiu cu aceeași denumire, însă demonstrațiile sunt date aici mult mai pe scurt și mai clar.

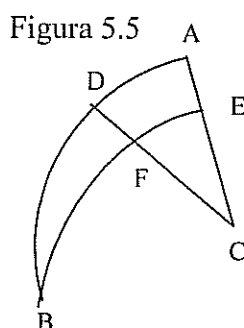
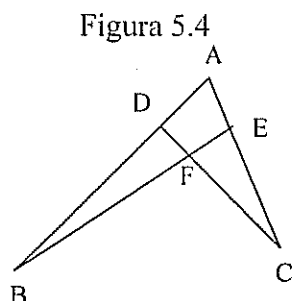
Numai cartea III conține propriu-zis trigonometria. În cartea III se demonstrează renumita teoremă a lui Menelau, care a căpătat mai târziu denumirea de teorema secantelor sau regula celor 6 mărimi. În această teoremă este studiată figura formată în plan sau pe sferă de 4 drepte, respectiv arce de cercuri mari, dintre care fiecare intersectează pe celelalte în trei puncte. Această figură care

era denumită în evul mediu „figura secantelor”, se numește astăzi „patrulater complet”. Pentru cazul plan, teorema lui Menelau pe care matematicienii din antichitate o formulau în termenii teoriei despre rapoarte compuse, poate fi scrisă astfel:

$$\frac{CE}{AE} = \frac{CF}{FD} \cdot \frac{BD}{AB}; \quad (1)$$

pentru cazul sferic în egalitatea (1) trebuie înlocuite segmentele prin coardele laturilor dublate sau în notațiile actuale prin sinusurile laturilor:

$$\frac{\sin CE}{\sin AE} = \frac{\sin CF}{\sin FD} \cdot \frac{\sin BD}{\sin AB} \quad (2)$$



Patrulaterul complet poate fi considerat și ca figura formată de unul dintre cele patru triunghiuri ACD; ABE, ECF și DBF prin intersecția secantei corespunzătoare cu dreptele BFE, CFD, BDA și CEA. De asemenea teorema lui Menelau poate fi scrisă în patru variante, dintre care în „Sferica” sunt indicate prima și a treia (a doua este simetrică față de prima, a patra față de a treia); varianta a treia are forma:

$$\frac{\sin AC}{\sin AE} = \frac{\sin CD}{\sin DF} \cdot \frac{\sin BF}{\sin BE} \quad (2')$$

Cazul plan al teoremei lui Menelau era probabil cunoscută încă lui Euclid

Menelau folosea, ca general cunoscută, teorema asupra raportului anarmonic a patru cercuri mari ce trec printr-un punct comun. Prin urmare această teoremă era cunoscută încă înainte de Menelau.

5.5.13 Jacob Steiner

Jacob Steiner a semnalat, în 1827, existența tetraedrelor ortologice adică a unei perechi de tetraedre care se bucură de proprietatea că perpendicularele din vârfurile unui tetraedru pe fețele celuilalt sunt patru drepte concurente. Steiner a arătat că proprietatea este reciprocă.

În 1832, Steiner a arătat, completând teorema Crelle, că dacă într-un tetraedru, diferența muchiilor opuse este aceeași, atunci există opt sfere tangente celor patru muchii și punctele de contact sunt de fiecare sferă, coplanare.

Steiner a rezolvat numeroase probleme de extrem, pe cale sintetică. Astfel, el a arătat, în 1827, că dintre toate poligoanele de n laturi, izoperimetrice, aria maximă este realizată de cerc.

Tot în 1827, a arătat că dintre toate poliedrele cu fețe patrulatere, de arie dată, octaedrul regulat are volumul maxim.

Reluând o conjectură a lui Abul Vafa (sec. 10), Steiner a arătat, în 1832, că dându-se în plan un cerc c și centrul său C , putem să efectuăm numai cu rigla, toate construcțiile (realizabile cu rigla și compasul).

Această teoremă este denumită teorema Steiner.

Steiner a arătat că dacă două drepte izogonale (simetrice în raport cu bisectoarea) duse prin vârful A al triunghiului ABC taie latura opusă în punctele M și N avem relația:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NB}{NC} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2 \text{ numită relația Steiner.}$$

Steiner a încadrat unele teoreme disparate de geometrie elementară, în teoria conicelor, unde

își găsesc o explicație unitară.

Astfel, el a arătat, în 1827, că dacă un triunghi este circumscris unei parabole, directoarea parabolei trece prin ortocentrul triunghiului. Ca aplicație, a dedus că ortocentrele triunghiurilor formate de patru drepte sunt coliniare (pe directoarea parabolei înscrisă patrulaterului). Proprietatea este numită teorema Aubert.

În 1826, Steiner a considerat punctele inverse în raport cu un triunghi, arătând că dacă M este un punct în planul unui triunghi ABC , simetricile dreptelor AM , BM , CM în raport cu bisectoarele unghiurilor A , B , C sunt de asemenea concurente într-un punct M' . Steiner a arătat că punctele inverse în raport cu un triunghi sunt focarele unei conice înscrise.

Totodată, Steiner a dat o explicație naturală teoremei Miquel arătând că punctul Miquel este focarul parabolei înscrise patrulaterului complet. El a completat teorema arătând că centrele celor patru cercuri circumscrise triunghiurilor formate de patru drepte sunt situate pe un cerc, care trece și prin punctul Miquel.

Teorema Miquel cu completarea lui Steiner este considerată cea mai frumoasă teoremă de geometrie elementară.

În 1844, Steiner a studiat elipsele de arie maximă și minimă înscrisă respectiv circumscrisă unui triunghi, numite elipsele Steiner. Deși au fost considerate anterior de Euclid, Steiner a adăugat numeroase proprietăți noi.

Steiner a arătat, în 1844, că elipsa minimă circumscrisă este conica polară a lui G , și totodată izogonala dreptei Lemoine.

În detaliu, în coordonatele baricentrice, cubica formată de laturile unui triunghi are ecuația $f(x, y, z) = xyz = 0$

Conica polară a unui punct $M(\alpha, \beta, \gamma)$ în raport cu cubica $f(x, y, z) = 0$ are ecuația $\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 0$ când M coincide cu $G(1; 1, 1)$ obținem elipsa Steiner circumscrisă $1/x + 1/y + 1/z = 0$

Dreapta Lemoine a unui triunghi este dreapta care unește punctele de intersecție cu laturile ale tangentelor duse la cercul circumscris, în vârfurile opuse. Când un punct M descrie dreapta Lemoine, punctul invers M' descrie o conică, anume prima elipsă a lui Steiner.

În 1866, Steiner a arătat că cercurile osculatoare în punctele A , B , C la elipsa minimă circumscrisă au un punct comun, S , situat la intersecția elipsei cu cercul circumscris triunghiului.

Punctul S este numit punctul Steiner al unui triunghi.

Elipsele și punctul Steiner au fost obiectul a numeroase probleme de geometria triunghiului.

CAPITOLUL VI

METODOLOGIA PROIECTĂRII OPȚIONALELOR

6.1. Repere pentru proiectarea opționalelor

Locul opționalelor.

Planul-cadru de învățământ oferă posibilitatea alegerii și, deci, a proiectării și a dezvoltării opționalelor în cadrul fiecărei arii curriculare dar și la intersecția acestora (prin intermediul temelor integrate).

Rolul opționalelor.

Opționalul este un element esențial în contextualizarea curriculum-ului, permițând adaptarea ofertei de învățare la nevoile și interesul elevilor. Opționalul face posibilă manifestarea creativității profesorului motivându-l să-și conceapă nu numai strategiile didactice proprii ci și obiectivele și conținuturile avute în vedere pentru realizarea unui curs original care, se pliază caracteristicilor elevilor săi. Opționalul reprezintă diversificarea parcursurilor școlare dincolo de curriculum-ul nucleu valabil pentru toți.

Tipuri de opțional

Opționalele pot fi:

1. Opționalul la nivelul disciplinei constă în activități, module, proiecte care nu sunt incluse în programa școlară.
2. Opționalul la nivelul ariei curriculare presupune alegerea unei teme care implică cel puțin două discipline dintr-o arie.
3. Opționalul integrat, la nivelul mai multor arii curriculare.

Modele care fundamentează opționalul la nivelul ariei/mai multor arii.

I. Modelul “infuziei” presupune formularea unor obiective generale, cu caracter transdisciplinar, comune pentru mai multe obiecte de studiu cuprinse în planul de învățământ sau pentru disciplinele care configurează o anumită arie curriculară.

II. Modelul “hibridării” presupune alegerea unor obiective care, prin complexitatea lor și prin specificul integrat, necesită constituirea unui (sub)domeniu independent (“hibrid”).

III. Modelul “polarizării” implică existența unei discipline pilot care, pentru realizarea unor obiective care îi sunt specifice “polarizează” segmente din alte discipline.

Structura programei de opțional

Pentru elaborarea programei de opțional propunem următoarea schemă de proiectare care este în acord cu modelul programelor din trunchiul comun.

- Argument
- Obiective de referință
- Lista de conținuturi
- Modalități de evaluare
- Bibliografie

Pentru **Argument**, se vor redacta 2-3 paragrafe care motivează cursul propus: nevoi ale elevilor, ale comunității locale, formarea unor competențe de transfer etc.

Obiectivele de referință (pentru un opțional de o oră pe săptămână se vor defini și urmări 5-6 obiective de referință – pe care elevii urmează să le atingă până la sfârșitul anului) – vor fi formulate după modelul celor din programa națională (a materiilor din trunchiul comun), dar nu vor fi reluări ale acestora. Dacă opționalul ar repeta obiectivele de referință ale curriculum-ului nucleu, atunci opționalul respectiv nu ar aduce nimic nou din punct de vedere al formării și dezvoltării unor capacități ale gândirii (ar aprofunda eventual, prin adăugarea unor conținuturi, competențe care se formează prin urmărirea obiectivelor din programa națională).

Un obiectiv de referință este corect formulat dacă prin enunțul său răspunde la întrebarea “ce poate să facă elevul?”. Dacă răspunsul la această întrebare nu este clar (ceea ce poate face elevul nu poate fi demonstrat și evaluat) atunci obiectivul este prea general definit.

Lista de conținuturi cuprinde informațiile pe care opționalul le propune ca bază de operare pentru formarea competențelor vizate de obiective. Altfel spus, sunt trecute în listă acele informații care vehiculate, introduse, combinate și recombinate între ele și cu altele învățate anterior.

Ca în cazul informațiilor prevăzute în programele obligatorii ale disciplinelor de trunchi comun, informațiile din lista opționalului nu vor fi considerate un scop în sine ci mijloc pentru formarea intelectuală.

Modalitățile de evaluare. Vor fi trecute tipurile de probe care se potrivesc opționalului propus (de exemplu: probe scrise, probe orale, probe practice, referat, proiect etc.). Nu vor fi incluse probele ca atare.

6.2. Programe pentru opționalele „Pagini din istoria matematicii” și „Geometria triunghiului”

Prezentăm programele pentru opționalele „Pagini din istoria matematicii” și „Geometria triunghiului” a căror bibliografie se regăsește în bibliografia lucrării.

PAGINI DIN ISTORIA MATEMATICII

Clasa a VII-a

DENUMIREA OPȚIONALULUI: *PAGINI DIN ISTORIA MATEMATICII*

TIPUL: *MONODISCIPLINAR*

DURATA: *2 SEMESTRE*

NUMĂR DE ORE PE SĂPTĂMÂNĂ: *1*

ARGUMENT

Scopul introducerii opționalului PAGINI DIN ISTORIA MATEMATICII este stimularea interesului elevului pentru cunoașterea istoriei matematicii, prin sensibilizarea acestuia cu ajutorul unor probleme variate, atractive și amuzante, în scopul de a-i oferi elevului un orizont cultural mai larg, la care se poate raporta ulterior, care să-l ajute la înțelegerea și la prelucrarea unor informații noi.

Evoluția gândirii omului reface progresul științific al omenirii, chiar dacă în preadolescență elevul nu este cointerestat să urmărească istoria decantării conceptelor științifice, el va învăța, poate, îndepărtându-se în mod paradoxal, în cele mai multe cazuri, de scopul principal al disciplinelor științifice – formarea unei concepții științifice despre lume. Rigoarea definițiilor și raționamentelor matematice, chiar și atunci când nu îi este străină școlarului, îi pare acestuia o complicație fără sens, îngreunându-i instruirea cunoașterii de care are parte în școală. Credem că apropierea copilului de aventura intelectuală premodernă a omenirii poate îndepărta aceste neajunsuri. Mai mult aptitudinile - în esență, vocația științifică – pot fi trezite în mai mare măsură prin dezvăluirea încărcăturii istoriei intelectuale a anumitor concepte științifice, deoarece evoluția acestora poartă în sine, implicit, continua tensiune a cunoașterii, rezultând, în cele din urmă,

angajarea elevului nu într-un simplu proces cognitiv, ci chiar într-unul afectiv-cognitiv (singurul generator al realului interes pentru studiu).

OBIECTIVE DE REFERINȚĂ ȘI ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

:

OBIECTIVE DE REFERINȚĂ

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

La sfârșitul clasei a VII-a elevii vor fi capabili

1. Să cunoască axiomele matematicii
2. Să rezolve probleme celebre de matematică
3. Să cunoască biografiile unor mari matematicieni
4. Să manifeste perseverență și creativitate pentru realizarea unui proiect de istoria a matematicii.
5. Să manifeste interes pentru folosirea tehnologiilor în studiul matematicii

- se face un portofoliu
- se rezolvă exerciții
- se dezbate o problemă
- se face un studiu de caz
- să utilizeze INTERNET-ul ca sursă de informare
- se întocmește un portofoliu
- se face studiu de caz
- se rezolvă exerciții
- se întocmește un portofoliu
- se face o analiză de produs
- se discută o problemă
- se elaborează un proiect

LISTA DE CONȚINUTURI

AXIOMATIZAREA MATEMATICII

1	Elementele lui Euclid și gândirea științifică
2	David Hilbert și bazele geometriei
3	Simion Stoilov și axiomatizarea matematicii

SCURT RAID ÎN ISTORIA MATEMATICII ROMÂNEȘTI

1	Geometria elementară
2	Pagini din istoria matematicii românești
3	Contribuțiile matematicienilor români la dezvoltarea geometriei
4	Probleme celebre ale matematicienilor români

BIOGRAFIE SELECTIVĂ A UNOR MATEMATICIENI

1	Leonhard Euler și geometria
2	Apoloniu din Perga
3	Pitagora.
4	Menelau.
5	Torricelli Evangelista
6	Joseph Gergonne

PROBLEME CELEBRE ALE GEOMETRIEI

1	Cvadratura cercului
2	Cvadratura lunulelor
3	Dublarea cubului
4	Problema lui Arhimede

MODALITĂȚI DE EVALUARE:

EVALUARE PRIN PROBE ORALE
EVALUARE PRIN PROBE SCRISE

EVALUARE PRIN PORTOFOLIU
 EVALUARE PRIN ANALIZĂ DE PRODUS
 EVALUARE PRIN STUDIU DE CAZ
 EVALUARE PRIN PROIECT

GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

Clasa a VIII-a

DENUMIREA OPȚIONALULUI: GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

TIPUL: *MONODISCIPLINAR*

DURATA: 2 SEMESTRE

NUMĂR DE ORE PE SĂPTĂMÂNĂ: 1

ARGUMENT

Scopul introducerii opționalului *GEOMETRIA TRIUNGHIULUI* este stimularea interesului elevului pentru cunoașterea matematicii, prin prezentarea unor probleme variate, atractive și elegante. Am ales geometria triunghiului și a elementelor remarcabile din triunghi din următoarele motive: noile noțiuni sunt generalizări naturale ale celor deja asimilate prin orele din trunchiul comun, asimilarea noilor cunoștințe ale geometriei triunghiului este un indicator pentru acomodarea cu bagajul informativ-formativ achiziționat în anii de studiu al geometriei plane.

Geometria triunghiului aprofundează relațiile existente între clasele de poligoane și proprietățile cercului, formează o cultură de specialitate mai deosebită, permițând elevilor să-și valorifice ulterior cunoștințele într-o modalitate superioară.

OBIECTIVE DE REFERINȚĂ ȘI ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

:

OBIECTIVE DE REFERINȚĂ

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

La sfârșitul clasei a VIII-a elevii vor fi capabili

- | | |
|---|---|
| 1. Să coreleze relațiile existente în geometria triunghiului cu cele din geometria cercului | - se discută o problemă
- se rezolvă exerciții |
| 2. Să aplice direct rezultatele teoretice în rezolvări de probleme. | - se dezbate o problemă
- se rezolvă exerciții |
| 3. Să cunoască elementele remarcabile dintr-un triunghi | - se întocmește un portofoliu
- se rezolvă exerciții |
| 4. Să folosească noi metode de rezolvare a problemelor | - se rezolvă exerciții
- se face un studiu de caz |
| 5. Dezvoltarea interesului și a motivației pentru studiul matematic | - rezolvări de probleme |

LISTA DE CONȚINUTURI

GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

1	Relații între triunghiul echilateral și cercul circumscris
2	Teorema van Schooten
3	Teorema lui Evangelista Torricelli
4	Teorema medianei
5	Teorema lui Menelau
6	Teorema lui Ceva
7	Teorema lui Steiner
8	Teorema lui Stewart

DREPTE REMARCABILE

1	Concurența cevienelor (cazuri particulare)
2	Ceviene de rang K, cevienne izogonale
3	Dreapta lui Euler
4	Dreapta lui Simson
5	Dreapta lui Lemoine
6	Dreapta ortică

PUNCTE REMARCABILE

1	Concurența simedianelor
2	Punctul lui Nagel
3	Punctul lui Gergonne
4	Punctul lui Vecten
5	Punctul lui Brocard
6	Punctul lui Kariya

CERCURI REMARCABILE

1	Cercul lui Euler
2	Cercul lui Taylor
3	Cercurile lui Lemoine
4	Cercurile lui Apoloni

MODALITĂȚI DE EVALUARE:

EVALUARE PRIN PROBE ORALE

EVALUARE PRIN PROBE SCRISE

EVALUARE PRIN PORTOFOLIU

EVALUARE PRIN STUDIU DE CAZ

Integrarea opționalelor în orar.

Pentru a permite elevilor din clase diferite să urmeze anumite opționale, există soluția de a prevedea în orar blocuri de opțional în anumite zile la începutul sau la sfârșitul programului, astfel încât elevii din diferite clase să se regroupeze la opționalele pe care le-au ales indiferent de clasa de unde provin.

Tip de CDS	Caracteristici ale programei	Regim orar
Aprofundare	Programa pentru trunchiul comun (curriculum nucleu) (In cazuri de recuperare – respectiv pentru elevi care nu au reușit să dobândească achizițiile minime prevăzute prin programa anilor de studiu anteriori -, este permisă parcurgerea curriculum-ului nucleu, prin depășirea numărului de ore alocat trunchiului comun prin planul cadru)	Ore din plaja orară
Extindere	- Obiective de referință notate cu * - Conținuturi notate cu * (se regăsesc în programa disciplinei de trunchi comun)	Ore din plaja orară
Opțional la nivelul disciplinei	- Noi obiective de referință - Noi conținuturi (noutatea este definită față de programa disciplinei de trunchi comun)	Ore de opțional
Opțional integrat la nivelul ariei sau al întregului curriculum	- Noi obiective – complexe - Noi conținuturi – complexe (noutatea este definită față de programele disciplinelor de trunchi comun implicate în integrare)	Ore de opțional

6.3 Aspecte privind predarea Curriculum-ului la dispoziția școlii la clasă

Dacă nu există auxiliare care să sprijine desfășurarea orelor de opțional, profesorul fiind în situația de a realiza un suport de curs, atunci este necesară elaborarea unui alt instrument a cărei

menire este de a structura și detalia cerințele programei. Acest instrument este sinopsis-ul și el reprezintă un fel de “hartă” a cursului – o organizare coerentă a ceea ce urmează să fie făcut la opțional.

În sinopsis se poate trece o rubrică privind numărul de ore afectate unei unități de învățare și în felul acesta obținem și o planificare calendaristică a unităților de învățare. Prezentăm sinopsis-urile opționalelor “Pagini din istoria matematicii” și “Geometria triunghiului”:

SINOPSIS

Pagini din istoria matematicii clasa a VII-a

Nr. crt.	TEMA	UNITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	CONȚINUTURI	OBIECTIVELE ÎNVĂȚĂRII	ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	Nr. ore
1	Axiomatizarea matematicii	Elementele lui Euclid și gândirea științifică.	- Școala din Alexandria; contribuțiile lui Euclid la dezvoltarea matematicii. - Conținutul celor 13 cărți ale lui Euclid.	- Să știe cine a fost Euclid, în ce perioadă a trăit. - Să știe ce cuprind cele 13 cărți ale lui Euclid.	- Se întocmește un portofoliu. - Se face un studiu de caz. - Se elaborează un proiect.	2
		David Hilbert și bazele geometriei.	- Rolul lui David Hilbert în axiomatizarea geometriei. - Contribuțiile sale la dezvoltarea geometriei.	- Să cunoască în ce perioadă a trăit David Hilbert și care au fost contribuțiile sale la dezvoltarea geometriei.	- Se întocmește un portofoliu - Se face un studiu de caz.	1
		Simion Stoilov și axiomatizarea matematicii	- Cercetările de înaltă valoare științifică ale lui Simion Stoilov. - Suprafețele Stoilov.	- Să cunoască principalele opere realizate de Simion Stoilov. - Să cunoască noțiunea introdusă pentru prima dată în matematică (spațiu de acoperire).	- Se face un studiu de caz. - Se discută o problemă.	1
2	Scurt raid în istoria matematicii românești	Geometria elementară	- Influența geometriei proiective asupra manualelor elementare. - Despre problemele izoperimetrice. - Matematica în România la începutul secolului al XIX-lea.	- Să cunoască importanța geometriei proiective. - Să știe despre problemele izoperimetrice ale lui L'Huilier; Steiner. - Învățământul matematic în școlile de inginerie ale lui Gheorghe Lazăr.	- Se elaborează un proiect. - Se întocmește un portofoliu.	2

Nr. crt.	TEMA	UNITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	CONȚINUTURI	OBIECTIVELE ÎNVĂȚĂRII	ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	Nr. ore
2	Scurt raid in matematicii romanesti	Pagini din istoria matematicii românești.	<ul style="list-style-type: none"> - "Elemente de geometrie" de A:M: Legendre - prima lucrare de geometrie în limba română. - "Gazeta matematică" și întemeietorii săi. - Geometria triumfiului în tematica "Gazetei matematice". 	<ul style="list-style-type: none"> - Să cunoască ce conține cartea lui A.M. Legendre tradusă de Petrache Poenaru. - Să știe cine a întemeiat "Gazeta matematică", o adevărată școală, și faima ei peste hotarele țării. - Să cunoască o parte din tematica "Gazetei matematice". 	<ul style="list-style-type: none"> - Se elaborează un proiect. - Se discută o problemă. 	2
		Contribuțiile matematicienilor români la dezvoltarea geometriei.	<ul style="list-style-type: none"> - Diversitatea operei matematice a lui Traian Lalescu . - Cercetările de înaltă valoare științifică ale lui Simion Stoilov. - Activitatea științifică a lui Gheorghe Țițeica. - Creația matematică a lui Dimitrie Pompeiu. - Dan Barbilian și geometria algebrică. 	<ul style="list-style-type: none"> Să cunoască câteva opere matematice ale lui Traian Lalescu. - Să cunoască rolul lui Simion Stoilov în dezvoltarea matematicii. - Să știe despre activitatea științifică a lui Gheorghe Țițeica și despre conferințele ținute la Sorbona. - Să știe despre memoriile publicate în revistele de specialitate din țară și de peste hotare ale lui Dimitrie Pompeiu. - Să știe despre fundamentarea axiomatică a geometriei lui Dan Barbilian. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se întocmește un portofoliu. - Se elaborează un proiect. - Se discută o problemă. - Se face un studiu de caz. 	5
		Probleme celebre ale matematicienilor români.	<ul style="list-style-type: none"> - Problema piesei de cinci lei a lui Gheorghe Țițeica. - Relația lui Traian Lalescu privind bisectoarele interioare. - Omologiile lui Dan Barbilian. - Inegalitatea lui Ion Ionescu. 	<ul style="list-style-type: none"> - Să cunoască problemele celebrilor matematicieni români. - Să poată rezolva probleme. - Să recunoască autorul anumitor inegalități. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se rezolvă probleme. - Se discută o problemă. - Se face un studiu de caz. 	4

Nr. crt.	TEMA	UNITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	CONȚINUTURI	OBIECTIVELE ÎNVĂȚĂRII	ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	Nr. ore
3	Biografia selectivă a unor matematicieni	Leonard Euler și geometria.	<ul style="list-style-type: none"> - Leonard Euler un exemplu minunat de muncă dedicat științei. - Imensitatea operei matematice a lui Leonard Euler în algebră, în geometrie, în teoria numerelor, în analiza matematică, în teoria ecuațiilor diferențiale, în trigonometrie. 	<ul style="list-style-type: none"> - Să cunoască principalele opere matematice ale lui Leonard Euler din algebră, analiza matematică, geometrie, teoria numerelor, trigonometrie. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se întocmește un portofoliu. 	1
		Apoloniu din Perga	<ul style="list-style-type: none"> - Conținutul lucrării "Secțiuni conice" a lui Apoloni din Perga - Alte opere ale lui Apoloni. 	<ul style="list-style-type: none"> - Să cunoască ce cuprind cele șapte cărți ale lui Apoloni. - Să știe ce alte lucrări sunt cunoscute numai după denumirile lor citate de Pappus. 	Se elaborează un proiect.	1
		Pitagora	<ul style="list-style-type: none"> - Școala lui Pitagora și importanța sa în dezvoltarea matematicii. - Noțiuni introductive despre numere figurative, numere perfecte, numere amabile. 	<ul style="list-style-type: none"> - Să știe în ce perioadă a trăit Pitagora și ce rol a avut în dezvoltarea matematicii. - Să cunoască exemple de numere "figurative", numere perfecte, numere amabile (prietene) și legende ale apariției lor. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se întocmește un portofoliu. 	1
		Menelau	<ul style="list-style-type: none"> - Conținutul lucrării în trei volume a lui Menelau. - Teorema lui Menelau pentru cazul plan și pentru cel sferic. 	<ul style="list-style-type: none"> - Să cunoască ce conțin lucrările lui Menelau pentru cazul plan și pentru cel sferic. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se elaborează un proiect. 	1
		Joseph Gergonne	<ul style="list-style-type: none"> - Principiul dualității. - Generalizarea teoremei lui Pascal realizată de Joseph Gergonne. 	<ul style="list-style-type: none"> - Să cunoască noțiunea de dualitate. - Să cunoască noțiunea de clasă a unei curbe plane și clasă a unei suprafețe 	<ul style="list-style-type: none"> - Se face un studiu de caz. 	1
		Torricelli Evangelista	<ul style="list-style-type: none"> - Cercetări matematice expuse în "Opera geometrică". - Teorema lui Torricelli. 	<ul style="list-style-type: none"> - Să cunoască noțiunile de: "cercurile Torricelli", "punctul lui Torricelli". - Să cunoască meritele lui Torricelli din fizică. 	Se discută o problemă.	1

Nr. crt.	TEMA	UNITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	CONȚINUTURI	OBIECTIVELE ÎNVĂȚĂRII	ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	Nr. ore
4	Probleme celebre ale geometriei grecești.	Cvadratura cercului	<ul style="list-style-type: none"> - Cunoașterea enunțului complet a vestitei probleme - cvadratura cercului. - Valoarea lui π. 	<ul style="list-style-type: none"> - Să cunoască enunțul complet al cvadraturii cercului. - Să cunoască valoarea lui π găsită de Arhimede; de egipteni, babiloneni și valoarea reală cunoscută până în prezent. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se întocmește un portofoliu. - Se discută o problemă. 	2
		Cvadratura lunulelor	<ul style="list-style-type: none"> - Aria unei lunule se poate transforma în aria unui triunghi dacă i se poate face cvadratura. 	<ul style="list-style-type: none"> - Să știe demonstrația lui Hipocrat din Chios referitor la aria lunulei. - Să cunoască demonstrația cvadraturii lunulelor lui Hipocrat în spirit modern. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se face un studiu de caz. 	1
		Dublarea cubului	<ul style="list-style-type: none"> - Problema din Delos. - Legende legate de originea dublării cubului. - Rezolvarea algebrică a problemei delice (problema din Delos) 	<ul style="list-style-type: none"> - Să cunoască problema din Delos. - Să știe legende legate de originea problemei dublării cubului. - Să poată rezolva problema din Delos. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se elaborează un proiect. - Se discută o problemă. 	2
		Problema lui Arhimede	<ul style="list-style-type: none"> - Problema pe care a propus-o Arhimede într-o scrisoare către Eratostene din Cyrene sau problema taurilor lui Helios. 	<ul style="list-style-type: none"> - Să poată pune în ecuație problema lui Arhimede. - Să cunoască rezolvarea problemei taurilor lui Helios. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se discută o problemă. - Se face un studiu de caz. 	2

SINOPSIS

Geometria triunghiului clasa a VIII-a

Nr. crt	TEMA	UNITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	CONȚINUTURI	OBIECTIVELE ÎNVĂȚĂRII	ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	Nr. ore
1	Geometria triunghiului	Relații între triunghiul echilateral și cercul circumscris	<ul style="list-style-type: none"> - Lungimea laturii triunghiului echilateral. - Lungimea apotemei și aria triunghiului echilateral în funcție de raza cercului circumscris. - Existența relației $AM=BM+MC$ unde M aparține cercului circumscris triunghiului ABC. 	<ul style="list-style-type: none"> - Să cunoască formulele laturii apotemei și ariei triunghiului echilateral în funcție de raza cercului circumscris. - Să poată aplica în probleme relația lui Schooten. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se dezbate o problemă. - Se face un studiu de caz. 	2
		Teorema lui Schooten.			<ul style="list-style-type: none"> - Se face un studiu de caz. 	1
		Teorema lui Evangelista Torricelli.	<ul style="list-style-type: none"> - Cercurile circumscrise triunghiurilor echilaterale construite în exteriorul unui triunghi oarecare sunt concurente. 	<ul style="list-style-type: none"> - Să cunoască denumirea punctului de intersecție a celor trei cercuri –punctul Torricelli. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se discută o problemă. 	1
		Teorema lui Stewart. Teorema medianei. Lungimea bisectoarei interioare a unui unghi dintr-un triunghi.	<ul style="list-style-type: none"> - Relația lui Stewart și aplicații. - Teorema medianei enunț și demonstrație - Teorema bisectoarei; calcularea lungimii ei. 	<ul style="list-style-type: none"> - Cunoașterea relației lui Stewart și aplicațiile sale. - Să cunoască procedeul de obținere a medianei unui triunghi. - Să poată aplica teorema lui Stewart în calcularea lungimii bisectoarei interioare. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se dezbate o problemă. - Se face un studiu de caz. - Se rezolvă o problemă. 	4
		Teorema lui Menelau. Teorema lui Ceva. Teorema van Aubel.	<ul style="list-style-type: none"> - Teorema lui Menelau și reciproca sa. - Teorema lui Ceva și reciproca sa. - Teorema van Aubel și relația lui van Aubert. 	<ul style="list-style-type: none"> - Să înțeleagă și să poată folosi teorema lui Menelau în rezolvări de probleme. - Să poată folosi teorema lui Ceva în rezolvări de probleme. - Să aplice cu ușurință relația lui Aubel în rezolvări de probleme. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se dezbate o problemă. - Se face un studiu de caz. - Se elaborează un proiect. 	3
		Teorema lui Steiner	Teorema lui Steiner și relația lui Steiner.	<ul style="list-style-type: none"> - Să cunoască relația lui Steiner. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se dezbate o problemă. 	1

Nr. crt	TEMA	UNITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	CONȚINUTURI	OBIECTIVELE ÎNVĂȚĂRII	ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	Nr. ore
2	Drepte remarcabile în triunghi	Concurența cevienelor. Ceviene de rang k. Ceviene izogonale.	- Izogonalele a trei ceviene concurente sunt concurente. - Concurența cevienelor. - Ceviene de rang k.	- Să cunoască noțiunea de ceviană, ceviană izogonală. - Să înțeleagă și să aplice în probleme teoria studiată.	- Se face un studiu de caz. - Se dezbate o problemă.	2
		Dreapta lui Euler.	- În orice triunghi ABC ortocentrul, centrul de greutate și centrul cercului circumscris triunghiului sunt situate pe aceeași dreaptă.	- Să cunoască demonstrația teoremei lui Euler. Să știe relația dintre aceste puncte (ortocentrul, centrul de greutate și centrul cercului circumscris triunghiului).	- Se face un studiu de caz.	1
		Dreapta lui Simson	- Proiecțiile ortogonale ale unui punct M de pe cercul circumscris triunghiului ABC pe laturile acestuia sunt coliniare.	- Să cunoască demonstrația teoremei lui Simson. - Să poată generaliza teorema lui Simson.	- Se discută o problemă.	1
		Dreapta lui Lemoine	- Tangentele la cercul circumscris unui triunghi neisoscel în vârfurile lui taie laturile opuse în puncte situate pe o aceeași dreaptă.	- Să poată aplica reciproca teoremei lui Menelau. - Să poată utiliza dreapta lui Lemoine în rezolvări de probleme.	- Se întocmește un proiect.	1
		Dreapta ortică	- Triunghiul ortic. - Dreapta ortică a unui triunghi neisoscel și nedreptunghic.	- Să înțeleagă noțiunile de triunghi ortic și să-l poată construi. - Să înțeleagă demonstrația teoremei. - Să poată arăta că dreapta ortică este perpendiculară pe dreapta lui Euler.	- Se face un studiu de caz.	1
3	Puncte remarcabile	Punctul lui Lemoine	- Simediane - Concurența simedianelor.	- Să înțeleagă noțiunea de simediană. - Să poată aplica teorema lui Steiner. - Să poată aplica forma trigonometrică a teoremei lui Ceva.	- Se dezbate o problemă	1
		Punctul lui Nagel	Teorema lui Nagel	- Să înțeleagă demonstrația teoremei lui Nagel. Să poată realiza figura geometrică specifică teoremei.	- Se întocmește un portofoliu.	1

Nr. crt	TEMA	UNITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	CONȚINUTURI	OBIECTIVELE ÎNVĂȚĂRII	ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE	Nr. ore
3	Puncte remarcabile	Punctul lui Gergonne	Teorema lui Gergonne	- Să poată aplica reciproca teoremei lui Ceva. - Să înțeleagă noțiunea de adjuncțele punctului Gergonne.	- Se realizează un proiect. - Se face un studiu de caz.	2
		Punctul lui Vecten	Teorema lui Vecten	- Să înțeleagă demonstrația teoremei lui Vecten. - Să poată aplica teorema reciprocă a lui Ceva.	- Se dezbate o problemă.	1
		Punctele lui Brocard	Teorema lui Brocard	- Să cunoască demonstrația teoremei lui Brocard. - Să poată aplica în rezolvări de probleme noțiunile însușite.	- Se face un studiu de caz.	1
		Punctul lui Kariya	Teorema lui Kariya	- Să înțeleagă demonstrația teoremei. - Să poată realiza figura geometrică corespunzătoare.	- Se dezbate o problemă.	1
4	Cercuri remarcabile	Cercul lui Euler	Teorema lui Euler	- Să înțeleagă demonstrația teoremei lui Euler - Să poată construi figura geometrică corespunzătoare.	- Se face un studiu de caz.	1
		Cercul lui Taylor	Teorema lui Taylor	Să poată demonstra teorema lui Taylor	- Se rezolvă o problemă.	1
		Cercurile lui Lemoine	- Primul cerc al lui Lemoine. - Al doilea cerc al lui Lemoine.	- Să cunoască noțiunile legate de cercurile lui Lemoine și să poată construi figura geometrică corespunzătoare	- Se dezbate o problemă. Se întocmește un portofoliu.	2
		Cercurile lui Apoloni	- Teorema: "Fie $[AD]$ și $[AD']$ bisectoarele interioară și exterioară ale unghiului $\angle BAC$ al triunghiului neisoscel ABC . Locul geometric al punctelor M din planul triunghiului ABC pentru care $MB/MC=AB/AC$ este un cerc care trece prin punctele A , D și D' ."	- Să cunoască noțiunea de loc geometric. - Să înțeleagă demonstrația teoremei lui Apoloni.	- Se realizează un proiect. - Se face un studiu de caz.	2

Alocarea în timp este necesară pentru a vedea în ce măsură sinopsis-ul acoperă programa pentru parcursul de învățare propus. Dacă acestui număr de ore îi va corespunde și o coloană cu datele preconizate, atunci sinopsis-ul ține loc și de planificare calendaristică

Planificarea calendaristică

În contextul noului curriculum, planificarea calendaristică se transformă dintr-un document administrativ formal care repetă modul de gestionare a timpului propus de programa analitică, într-un instrument de interpretare personală a programei, care asigură un demers didactic concordant cu situația concretă din clasă.

Proiectarea unei unități de învățare

Conceptul de unitate de învățare. O unitate de învățare poate să acopere una sau mai multe ore de curs. Alocarea timpului afectat unei unități de învățare se face prin planificarea anuală sau sinopsis. Realizarea unei unități de învățare impune un demers didactic proiectat de fiecare profesor în parte.

Metodologia de proiectare a unei unități de învățare constă într-o succesiune de etape, înlănțuite logic, ce contribuie la detalierea conținuturilor, în vederea atingerii obiectivelor de referință.

Etapile proiectării sunt aceleași oricare ar fi unitatea de învățare vizată.

Prezentăm proiectarea unității de învățare ce dă nume opționalului „Geometria triunghiului”.

Clasa: a VIII-a

Unitatea de învățare: Geometria triunghiului

Nr. crt.	Conținuturi - detalieri	Obiective de referință	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
1	Relații între triunghiul echilateral și cercul circumscris	1	Identificarea ipotezei și a concluziei unei probleme Sesizarea greșelilor dintr-o succesiune de argumente Redactarea rezolvării unei probleme Argumentarea orală a demersului de rezolvare a unei probleme	Culegeri de probleme Tabele matematice Instrumente geometrice	Observarea sistematică a elevilor
2.	Teorema van Schooten	4	Discutarea în grup a metodei de rezolvare (demonstrație) a teoremei Găsirea în grup a unor metode alternative de rezolvare	„Probleme practice de geometrie” de Nicolescu, L. Instrumente geometrice	Investigația
3.	Teorema lui Evangelista Torricelli	4	Utilizarea unor metode variate în rezolvarea teoremei: 1. metoda lui N. N. Mihăileanu 2. demonstrația lui Torricelli 3. demonstrația dată de van Schooten	„Istoria matematicii” de N. N. Mihăileanu „Triunghiul ringul cu trei colțuri” de Vodă, Gh.	Se elaborează un proiect
4	Teorema lui Stewart	2	Argumentarea orală a demersului de demonstrație a teoremei Aplicații	Instrumente geometrice Conversația, Dialogul	Observarea sistematică a elevilor

Nr. crt.	Conținuturi - detalieri	Obiective de referință	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
5	Teorema medianei	2 3	Compararea teoremei cu cea a lui Stewart Găsirea în grup a unor metode alternative de rezolvare	Culegeri de probleme Dezbaterea	Temă de lucru în clasă
6	Lungimea bisectoarei interioare a unui unghi dintr-un triunghi	2 3	Exerciții de aplicare a teoremei lui Stewart	Instrumente geometrice Culegeri de probleme Exercițiu	Tema pentru acasă
7	Teorema lui Menelau	2	Exerciții de aplicare a metodei triunghiurilor asemenea	Instrumente geometrice Exercițiu	Observarea sistematică a elevilor: atitudinea elevilor față de sarcina dată
8	Teorema lui Ceva	2 4	Exerciții de aplicare a teoremei lui Menelau și a teoremei sinusurilor pentru forma trigonometrică a teoremei lui Ceva	Instrumente geometrice Culegeri de probleme Tabele matematice	Autoevaluarea
9	Teorema van Aubel	2 4	Găsirea în grup a metodelor de demonstrație: Menelau, calculul ariilor-raportul ariilor	Culegeri de probleme Instrumente geometrice Demonstrația	Evaluare orală
10	Teorema Steiner	2	Exerciții de aplicare a metodei triunghiurilor dreptunghice asemenea	Exercițiul Instrumente geometrice	Test

Unitățile de învățare vor fi proiectate pe parcursul anului școlar iar pentru fiecare lecție din cadrul unității de învățare este necesar proiectarea acestora în vederea unui demers didactic eficient.

Prezentăm un model de proiectare a lecției „Cercul lui Euler”.

Proiectarea lecției: CERCUL LUI EULER

I. Obiective generale

1. Să coreleze relații existente în geometria triunghiului cu cele din geometria cercului.
2. Să cunoască elementele remarcabile dintr-un triunghi.
3. Să folosească noi metode de rezolvare a problemelor.

II. Obiective operaționale ale lecției

La sfârșitul lecției elevii vor fi capabili:

1. Să poată defini noțiunea de patrulater inscriptibil și să utilizeze proprietățile lui.
2. Să poată construi liniile importante în triunghi.
3. Să identifice ortocentrul triunghiului.
4. Să aplice proprietățile liniei mijlocii a unui triunghi.
5. Să folosească proprietatea medianei corespunzătoare ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic

Metode: descoperirea – expunerea, demonstrația , conversația, exercițiul

III. Desfășurarea lecției

a) Inventarul de cunoștințe utile:

1) - Definiția patrulaterului inscriptibil.

- Se va repeta definiția patrulaterului inscriptibil

- Se vor reactualiza proprietățile patrulaterului inscriptibil

- Se desenează un patrulater inscriptibil.

- Se reactualizează definiția și proprietățile patrulaterului inscriptibil.

2) – Se vor repeta definițiile liniilor importante în triunghi și construcția acestora.

- perpendiculara dusă printr-un punct pe o dreaptă

- împărțirea unui segment în două părți egale

3) – Se va reactualiza concurența înălțimilor și noțiunea de ortocentru al triunghiului.

- se va analiza cazul unui triunghi dreptunghic, obtuzunghic, ascuțitunghic

4) – Se va reaminti definiția liniei mijlocii și proprietățile ei.

- se enunță definiția liniei mijlocii

- se reamintesc proprietățile liniei mijlocii

5) – Se va prezenta proprietatea medianei corespunzătoare ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic

b) “Descoperirea” cu elevii a Cercului lui Euler

1). Se va desena un triunghi ascuțitunghic ABC și se vor construi înălțimile triunghiului și mijloacele laturilor sale. Fie $A_1 = \text{pr}BCA$, $B_1 = \text{pr}ACB$, $C_1 = \text{pr}ABC$ și punctele A' , B' , C' mijloacele laturilor BC, AC, AB.

Fie M, N, P mijloacele segmentelor $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$ unde H este ortocentrul triunghiului ABC (Figura 6.1).

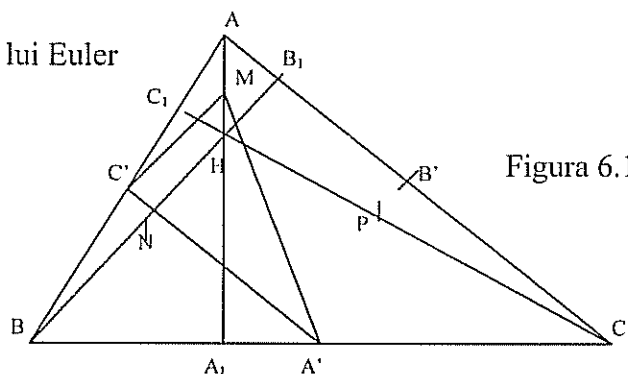


Figura 6.1

Se va scrie mediana A_1C' în triunghiul dreptunghic ABA_1 : $A_1C' = \frac{1}{2} AB$ (*)

- Se va scrie relația pentru linia mijlocie $A'B'$: $A'B' = \frac{1}{2} AB$ (**)

- Din cele două relații rezultă că $A'B' = A_1C'$, deci patrulaterul $A_1A'B'C'$ este trapez isoscel, prin urmare A_1 aparține cercului determinat de A' , B' , C'

Analog se arată că punctele B_1 și C_1 aparțin cercului ce trece prin punctele A' , B' , C' .

- Se demonstrează că patrulaterul $MC'A'B'$ este inscriptibil

$C'M$ este linie mijlocie în triunghiul ABH . Rezultă că $C'M = \frac{1}{2} BH$ și $C'M \parallel BH$ (1)

$A'C'$ este linie mijlocie în triunghiul ABC . Rezultă că $A'C' \parallel AC$ (2)

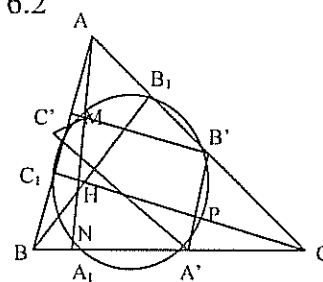
Din relațiile (1) și (2) rezultă că $C'M \perp A'C'$ deci $\angle MC'A' = 90^\circ$.

Analog se arată că $\angle M'B'A' = 90^\circ$ deci $MC'A'B'$ este inscriptibil, adică M se află pe cercul ce trece prin punctele A' , B' , C' .

Analog se arată că mijloacele N și P ale segmentelor $[BM]$ și $[CM]$ se află pe cercul determinat de punctele A' , B' , C' .

Deci am arătat că: Mijloacele laturilor unui triunghi, picioarele înălțimilor și mijloacele segmentelor ce unesc fiecare vârf cu ortocentrul triunghiului sunt situate pe un același cerc numit cercul lui Euler sau cercul median.

Figura 6.2



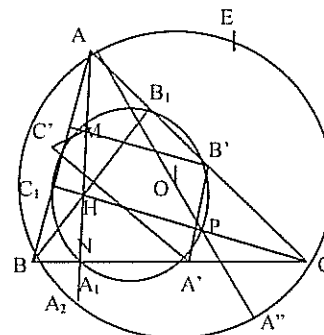
IV. Fixare, evaluare

Se arată că dreptele MA' , NB' , PC' sunt concurente.

Se demonstrează teorema lui Euler cu ajutorul locului geometric folosind mijlocul segmentului $[HE]$, unde $E \in \mathcal{C}(O, R)$. Se consideră E în pozițiile A ; A'' ; A_2 unde A'' este punctul

diametral opus lui A iar A_2 punctul unde înălțimea AA_1 intersectează cercul circumscris triunghiului ABC .

Figura 6.3



6.4. Didactica opționalului

Opționalul își propune să diversifice parcursurile de învățare prin venirea în întâmpinarea nevoilor și intereselor elevilor iar metodele didactice trebuie să se plieze unei aceleiași filozofii a învățării.

Prin metodologia adoptată la opțional este de dorit să se ofere parcursuri diferențiate, chiar individualizate. Din această perspectivă oferim mai jos câteva repere privind individualizarea învățării pornind de la teoria inteligențelor multiple.

Inteligențele multiple – de teorie la posibilități de aplicare didactică

Când Howard Gardner a formulat pentru prima oară teoria inteligențelor multiple (Frames of Mind, 1983), a pornit de la o critică a sistemului de învățământ (valorizator cu precădere a capacităților logico-matematice și lingvistice). Zece ani mai târziu (Multiple Intelligences. From Theory to Practice, 1993), el își rafinează poziția adăugând și elemente de cercetare experimentală, care transferă inteligențele multiple dintr-un concept criticat și criticabil într-un punct de plecare al unei practici școlare cu adevărat individualizate. De atunci, aplicațiile practice ale teoriei s-au înmulțit, succesul “inteligențelor multiple” în școală surprinzându-l chiar pe inițiatorul lor: “În mod sigur [teoria] a demonstrat tuturor că elevii nu sunt la fel și că testele ne arată numai superficial diferențele dintre copii”

Școala este organizată astfel ca cei mai inteligenți să avanseze spre nivelul elitelor, iar cea mai mare parte din elevi să dobândească cunoștințele de bază în cel mai eficient mod cu putință. Din acest motiv trebuie să existe un același curriculum pentru toți, aceleași metode de predare și aceleași metode standard de evaluare.

Când testele lui Binet au fost importate în America, reelaborate și diversificate în funcție de nevoi, succesul lor a condus la două consecințe majore, care domină încă spațiul educațional, în ciuda cercetărilor recente din sfera inteligențelor artificiale și a neurobiologiei:

1. o distanțare față de obiectivul inițial;
2. o sedimentare a viziunii unilaterale asupra intelectului Testele IQ nu reușesc totuși să prezică performanța după încheierea educației formale și nici să măsoare alte abilități umane în afara celor lingvistice și logico-matematice.

În accepțiunea tradițională, inteligența este generală, dar este dată de capacitatea de a rezolva probleme care solicită abilități logico-matematice și lingvistice, valorizate cu precădere de școală și măsurate cu precizie de teste. Lucrurile sunt mai complicate dincolo de zidurile școlii (un IQ înalt nu garantează succesul profesional, cu atât mai puțin pe cel social). Ele se complică și mai mult când ne raportăm la complexitatea minții umane. Neurobiologia a pus în evidență faptul că sistemul nervos este puternic diferențiat. În mod independent, la aceleași concluzii a ajuns și cercetările din sfera inteligenței artificiale: sistemele expert care conțin informații superdetaliată în domenii specifice demonstrează un foarte mic “transfer” sau chiar lipsa acestuia spre alte domenii de cunoaștere.

Viziunea pluralistă și cele opt inteligențe artificiale izolate de Gardner

Capacitatea cognitivă a omului este mai bine descrisă printr-un set de abilități, talente, deprinderi mentale, pe care Gardner le denumește “intelențe”. Toți indivizii normali posedă fiecare din aceste inteligențe într-o anumită măsură. Ceea ce îi diferențiază este gradul lor de dezvoltare și natura unică a combinații lor.

Odată acceptat intelectul multiplu, obiectivul imediat avut în vedere este selectarea inteligențelor. În acest sens, Gardner a consultat diferite surse: informații privind dezvoltarea normală cât și a copiilor supradotați, deteriorarea facultăților cognitive ca urmare a vătămărilor cerebrale, studii asupra populațiilor excepționale, date despre evoluția cogniției de-a lungul timpului, studii psihometrice (inclusiv corelații între teste), măsuri de transfer și generalizare între itemi de testare.

Conform criteriilor stabilite în urma acestor acumulări și analize de date, este denumită “intelență” numai acel “candidat” care are o “operație-nucleu” (sau set de asemenea operații) și care este susceptibil de a fi codat într-un “sistem simbolic” (“ca sistem de calcul neural, fiecare inteligență este activată de diferite tipuri de informații prezente intern și extern”; de asemenea, un “sistem simbolic determinat cultural captează și transferă importante forme de informații”, Gardner, 1993). Cu alte cuvinte, o inteligență trebuie să fie probată de:

- a) existența unei zone de reprezentare pe creier;
- b) existența unui sistem propriu de expresie (a un cod specific de simbolizare).

Pe această bază, Gardner a izolat inițial șapte inteligențe, pentru ca ulterior să mai includă una (după ce a verificat-o pe criteriile menționate). Acestea sunt (ordinea lor nu reflectă în nici un caz o ierarhie de valori):

1. Inteligența lingvistică (capacitatea de a rezolva probleme și a dezvolta produse cu ajutorul codului lingvistic)
2. Inteligența logico-matematică (capacitatea de a opera cu modele, categorii și relații, de a grupa și ordona date precum și capacitatea de a le interpreta)
3. Inteligența spațial-vizuală (capacitatea de a forma un model mental al lumii spațiale, de a opera folosind un asemenea model adică de a rezolva probleme și de a dezvolta produse cu ajutorul reprezentărilor spațiale și al imaginii)
4. Inteligența muzicală (capacitatea de a rezolva probleme și de a dezvolta produse cu ajutorul ritmului și melodiei)
5. Inteligența corporal-kinestezică (capacitatea de a rezolva probleme și a dezvolta produse cu ajutorul mișcării)
6. Inteligența naturalistă – este nou inclusă (capacitatea de a rezolva probleme și a dezvolta produse cu ajutorul clasificărilor/taxonomiilor și reprezentărilor din mediul înconjurător)
7. Inteligența interpersonală (capacitatea de rezolva probleme și de a dezvolta produse prin cunoașterea și interacțiunea cu ceilalți)
8. Inteligența intrapersonală (capacitatea de a rezolva probleme și de a dezvolta produse prin cunoașterea de sine)

Dacă din punct de vedere biologic inteligențele sunt independente, în funcție de diversele zone corticale care le guvernează, în privința obiectivării la nivel individual, ele apar în combinație. Gardner consideră de fapt individul ca o “colecție de inteligențe”. Practic el poate să nu fie în mod deosebit dotat cu nici una din inteligențe și totuși să se potrivească foarte bine unui anumit statut social și profesional datorită unei combinații anumite de inteligențe.

Implicațiile educative ale teoriei lui Gardner

Școala avută în vedere de Gardner își propune: dobândirea unei înțelegeri profunde în cadrul câtorva discipline-nucleu; încurajarea elevilor în folosirea cunoașterii asimilate pentru rezolvarea de probleme cu care se pot confrunta în comunitatea mai largă; încurajarea combinației unice de inteligențe a fiecărui elev.

Fiecare inteligență poate fi folosită deopotrivă în calitate de conținut al învățării și mijloc/mediu de comunicare a conținutului. Dacă un copil învață, de exemplu, un principiu

matematic, dar nu are o inteligență logico-matematică foarte dezvoltată, va avea fără îndoială dificultăți. Principiul matematic ce urmează a fi învățat – conținutul – există în sfera logico-matematică și ar trebui comunicat prin matematică (mijlocul). În aceste condiții, elevul care nu este în mod special “matematic” și problema este “foarte matematică” nu sunt de acord. Matematica în calitate de mediu eșuează. Trebuie găsită o altă cale pentru conținutul matematic – “o metaforă” în alt mediu (de exemplu limba, modele spațiale, mișcările corporale). Prin (inter)mediul unei inteligențe mai bine reprezentate decât cea matematică, elevul poate ajunge pe o cale secundară la soluția problemei. Totuși la un moment dat, “metafora” folosită trebuie retrasă în domeniul matematic. Fără această translație, ceea ce s-a învățat rămâne la un nivel superficial.

Școala centrată pe individ, atât prin metodele de evaluare cât și curriculum-ul favorizează diferitele profiluri de inteligențe ale elevilor. În cazul evaluării se avansează procedurile și instrumentele care se aplică diverselor inteligențe (nu numai celei lingvistice și logico-matematice) care permit “privirea directă” în multitudinea tipurilor de învățare. În acest sens, Gardner propune evaluarea proiectelor elevilor, în timp ce acestea sunt în progres. Avantajul, pe lângă contextualizarea învățării și evaluării, implică și conștientizarea pașilor în rezolvarea problemei sau crearea produsului, observându-se totodată folosirea diverselor medii specifice fiecărei inteligențe. Pe de altă parte, prin expunerea la medii variate, sunt stimulate mai multe inteligențe și se poate determina combinația de inteligențe a elevului, o informație utilă în abordarea individualizată ulterioară.

Aplicarea la clasă

Cea mai importantă aplicare didactică a teoriei sale este promovarea înțelegerii profunde a conceptelor fundamentale din diferite discipline, acordând elevilor posibilitatea de a le explora folosind o gamă largă de inteligențe. În acest sens, se recomandă:

- identificarea conceptelor importante ce trebuie predate;
- proiectarea de activități variate ca punct de plecare, pentru comunicarea ideilor și realizarea unei baze solide de cunoștințe;
- adâncirea înțelegerii prin investigarea subiectului dintr-o varietate de perspective;
- selectarea acelor activități care corespund cel mai bine obiectivelor propuse;
- crearea cadrului pentru folosirea mai multor sisteme de simboluri sau inteligențe pentru aplicarea și reprezentarea ideilor în scopul evaluării;
- îmbogățirea experienței prin abordarea conceptului atât în cadrul disciplinei cât și interdisciplinar.

Este de reținut faptul că profilul de inteligență nu se stabilește prin aplicarea unui test. Sunt necesare multe observări ale comportamentului copiilor pentru a ne da seama care le sunt activitățile cele mai comode, ce coduri de exprimare folosesc cu precădere și care sunt acelea pe care le evită.

Recomandări în privința proiectelor

În lumina experimentelor de câțiva ani, concluzia lui Gardner este că proiectele pot servi foarte bine mai multor scopuri: ele angajează elevii pe o perioadă de timp semnificativă, determinându-i să conceapă schițe, să le revizuiască și să reflecteze asupra lor; pe baza lor se dezvoltă relații interpersonale, operare; oferă o ucenicie pentru tipul de muncă ce va fi desfășurată după încheierea școlii; permite elevilor să-și descopere “punctele forte” și să le pună în valoare; mobilizează un sentiment al implicării, generând o puternică motivație interioară; și, probabil, lucru cel mai important, constituie un cadru propice pentru a demonstra înțelegerea dobândită în parcurgerea curriculum-ului școlar obișnuit.

Deși denotă un grad înalt de implicare a copilului în formație, proiectele nu presupun non-angajarea profesorului. Dacă elevii urmează să-și conceptualizeze, îndeplinească și prezinte eficient proiectele, atunci au nevoie de orientare și consiliere în toate fazele activității. Profesorul rămâne așadar un factor esențial al procesului.

BIBLIOGRAFIE

1. Andonie, George Șt. – Istoria matematicii în România, Ed. Științifică 1965-1967
2. Andonie, Gheorghe – Varia mathematica, Ed. Tineretului, 1969
3. Bobancu, V. – Caleidoscop matematic, Ed. Albatros, București, 1979
4. Botez, M. Ștefan – Gheorghe Țițeica, Ed. Tineretului, 1958
5. Botez, M. Ștefan – Dimitrie Pompeiu, Ed. Tineretului, 1963
6. Burton, David – The history of mathematics an introduction, Sydnei, 1985
7. Câmpan, Fl. – A treia carte cu probleme celebre din istoria matematicii, Ed. Albatros, București, 1976
8. Câmpeanu, Fl. – Triunghiuri, triunghiuri și iar triunghiuri, Ed. Ion Creangă, București, 1974
9. Cerghit, I.; Vlăsceanu, M. – Curs de pedagogie, Tip. Univ. București, 1988
10. Clarke, J.H.; Agne, R.M. – Interdisciplinary High School Teaching, Strategies for Integrated Learning, Allyn&Bacon, Boston, 1997
11. Cocea, Constantin – 200 de probleme din geometria triunghiului echilateral, Ed. Gheorghe Asachi, Iași
12. Cook, G.E.; Martinello, M.L. – Topics and Themes in Interdisciplinary Curriculum, Middle School Journal, 25, nr. 3/1994
13. Courant, Richard – Ce este matematica? Ed. Științifică, 1969
14. Duican, Laurențiu Duican, Ilie – Transformări geometrice, Ed. Științifică și Enciclopedică
15. Felixe, Lucienne – Expunere modernă a matematicii elementare, Ed. Științifică, 1973
16. Freeman, C.C.; Sokoloff, H.J. – Toward a Theory of Thematic Currucula: Constructing New Learning Environments for Teachers and Learners, Education Policy Analysis Archives, vol.3, nr. 14/1995
17. Gardner, Howard – Frames of Mind, Prentice Hall (Merill), New Jersey, 1983
18. Gardner, Howard – Multiple Inteligences From Theory to Practice, Allyn&Bacon, Boston, 1993
19. Howard, Eves – An introduction to the history of mathematics
20. Ionescu, M.; Chiș V. – Strategii de predare-învățare, Ed. Științifică, 1990
21. Lalescu, Traian – Geometria triunghiului, Ed. Apollo
22. Lapp, F.; Flood, J. – Integrating the Curriculum: First Steps, The Reading Teacher, 47, nr.5/1994
23. Leonte, Al. Trandafir, R. – Principii și structuri fundamentale în matematica de liceu, Ed. Albatros, București, 1986
24. Marcus, S.- Din gândirea matematică românească, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1975
25. Marin, Călin – Instruirea școlară-analiză multireferențială, Tip. Univ. București, 1991
26. Mihalescu, C. – Geometria elementelor remarcabile, Ed. Tehnică, București
27. Mihăileanu, N. – Istoria matematicii, Ed. Enciclopedică, 1974-1981
28. Moise, Edwin – Geometria elementară dintr-un punct de vedere superior, E.D.P. 1980
29. Neacșu, I. - Instruire și învățare, Ed. Științifică, București, 1990
30. Nicolescu, L. Boskoff, V. – Probleme practice de geometrie, Ed. Tehnică, București, 1990

31. Nicolescu, L. Boskoff, V. – Teoreme și probleme de geometrie elementară, Ed Universității București, 1986
32. Polya, G. – Cum rezolvăm o problemă ?, Ed. Științifică, București, 1965
33. Post, T.R.; Humphreys – Interdisciplinary Approaches to Curriculum: Themes for Teaching, Prentice Hall (Merill), New Jersey, 1997
34. Purcan, I.; Bâscă, O. – Oameni, idei, fapte din istoria matematicii, Ed. Economică, 1996
35. Stoica, D.; Stoica, M. – Psihopedagogie școlară, Ed. Scrisul Românesc, Craiova, 1981
36. Țițeica, Gheorghe – Culegere de probleme de geometrie, Ed. Tehnică, 1956
37. Vodă, Gh. Viorel – Surprize în matematica elementară, Ed. Albatros, 1981
38. Vodă, Gh. Viorel – Triunghiul – ringul cu trei colțuri, Ed. Albatros, 1979
39. Vodă, Gh. Viorel – Vraja geometriei demodate, Ed. Albatros, București
40. Wieleitner, H. – Istoria matematicii de la Descartes până la mijlocul secolului al XIX-lea, Ed. Științifică, București, 1969
41. *** - Psihologie școlară, Tip. Univ. București, 1987
42. *** - Psihopedagogie, Ed. Spiru Haret, București, 1994